

**Государственное бюджетное образовательное учреждение
среднего профессионального образования
Свердловской области
«АРТИНСКИЙ АГРОПРОМЫШЛЕННЫЙ ТЕХНИКУМ»**

**Методические рекомендации
по выполнению практических работ
по учебной дисциплине
«Математика»**

**Разработчик: Рудаков Сергей Вячеславович,
преподаватель**

п. Арти, 2019 г

ВВЕДЕНИЕ

Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

Современная математика изучает математические модели. Это могут быть как непосредственно математические модели реальных явлений, так и объекты для изучения этих моделей. Одна и та же модель может описывать свойства далеких друг от друга по своему конкретному содержанию реальных явлений. Для математики важна не природа рассматриваемых объектов, а существующие между ними отношения.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование является важнейшей составляющей в системе фундаментальной подготовки современного специалиста.

В данных методических указаниях вы найдете изложение теоретического материала, справочный материал, примеры решения задач, задания для самостоятельных занятий, для подготовки к контрольным работам, зачету, экзамену.

Содержание практических работ полностью соответствует рабочей программе по математике

Методические указания не являются учебником, поэтому не все изучаемые понятия рассмотрены одинаково подробно. По этой причине в некоторых случаях необходимо приложить для освоения материала больше усилий, чем в других..

Работая над каждой темой, лучше всего сначала изучить теоретический материал, повторить ранее изученные формулы, теоремы, разобраться в приведенных примерах. Если все понятно, то можно переходить к выполнению практических заданий.

Предусмотренные задания носят репродуктивный, частично-поисковый и поисковый характер. Все задачи и расчеты обязательно должны быть доведены до окончательного числового результата.

При выполнении практической работы студентам рекомендуется:

- использовать учебные пособия, справочники;
- проводить несложные дедуктивные рассуждения;
- обосновывать шаги решения задач;
- формулировать определения математических понятий;
- пользоваться математической терминологией и символикой;
- письменно оформлять решения задач;
- пользоваться калькулятором;
- самостоятельно изучать учебный материал.

Перечень практических работ по ОДП.12 «Математика»

	Содержание практических работ	Количество часов.
1.	Практическая работа № 1.Повторение.	13
2	Практическая работа № 44 Корень степени $n > 1$ и его свойства. Комплексные числа	2
3	Практическая работа № 45 Степень с рациональным показателем и ее свойства	3
4	Практическая работа № 43Свойства степени с действительными показателями	3
5	Практическая работа № 2. Преобразования простейших выражений включающих арифметические операции, а также операции извлечения корня и возведения в степень. Действия с комплексными числами	2
6	Практическая работа № 3 Преобразование выражений, содержащих степени и корни	6
7	. Практическая работа № 4 Преобразования простейших выражений, включающих арифметические операции, а также операцию логарифмирования	4
8	Практическая работа № 5 Преобразование логарифмических выражений	6
9	Практическая работа №46. Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения	4
10	Практическая работа № 6 Преобразование простейших тригонометрических выражений. Решение простейших тригонометрических уравнений.	4
11	Практическая работа № 7. Преобразование тригонометрических выражений. Решение простейших тригонометрических неравенств. Решение тригонометрических уравнений.	8
12	Практическая работа № 42График функций. Построение графиков заданных различными способами	2
13	Практическая работа № 41 Обратная функция. График обратной функции	2
14	Практическая работа № 8 Построение графиков	2
15	Практическая работа № 47 Степенная функция с натуральным показателем. Графики дробно-линейных функций. Преобразование графиков.	2
16	Практическая работа № 9. Определение и свойства степенной функции. Построение графиков	2
17	Практическая работа № 40 Преобразование графиков.	2
18	Практическая работа № 10 Построение графиков функций.	6
19	Практическая работа № 39 Преобразование графика.	2
20	Практическая работа № 11 Построение графиков функций.	6
21	Практическая работа № 38 Преобразования графиков.	2
22	Практическая работа № 12 Построение графиков функций.	6

23	Практическая работа № 13Вычисление производных.	2
24	Практическая работа № 48Наибольшее и наименьшее значение функций.	2
25	Практическая работа № 14 Применение производной к построению графиков функций.	4
26	Практическая работа № 15 Построение графиков функций.	2
27	Практическая работа № 16 Вычисление интегралов.	1
28	Практическая работа № 37 Применение интеграла в физике и геометрии.	2
29	Практическая работа № 17 Нахождение площади криволинейной трапеции.	3
30	Практическая работа № 18 Решение уравнений и неравенств	2
31	Практическая работа № 19 Решение иррациональных уравнений.	3
32	Практическая работа № 20 Решение показательных уравнений и неравенств.	3
33	Практическая работа № 21 Решение логарифмических уравнений и неравенств.	3
34	Практическая работа № 49 Тригонометрические неравенства.	2
35	Практическая работа № 22 Решение тригонометрических уравнений и неравенств.	2
36	Практическая работа № 50 Способ подстановки.	1
37	Практическая работа № 23 Решение систем уравнения с двумя неизвестными.	1
38	Практическая работа № 24 Решение систем неравенств с одной переменной.	1
39	Практическая работа № 25 Решение систем уравнений и неравенств	1
40	Практическая работа № 26 Решение комбинаторных задач. Понятие о задачах математической статистики.	6
41	Практическая работа № 52 Вероятность и статистическая частота.	2
42	Практическая работа № 27Решение статистических задач и задач с применением вероятных методов	4
43	Практическая работа № 36Изображение пространственных фигур.	1
44	Практическая работа № 28 Решение задач и построение сечений	6
45	Практическая работа № 29Правильные многогранники.	2
46	Практическая работа № 30 Решение задач, построение сечений.	9
47	Практическая работа № 53 Действие над векторами.	2
48	Практическая работа № 31 Применение векторов к решению задач	2
49	Практическая работа № 32 Решение задач	2
50	Практическая работа № 33 Решение задач. Тела вращения	9
51	Практическая работа № 34 Решение задач на вычисление объемов.	8
52	Практическая работа № 35Резерв учебного времени .Подготовка к экзамену	21
		198

Практическое занятие № 1.1

Решение уравнений: разложение на множители, введение новых переменных, подстановка

Цель работы:

студент должен:

знать:

- способы решения уравнений;

уметь:

- решать уравнения различными способами.

Сведения из теории:

Метод разложения на множители

Суть данного метода в том, чтобы путем равносильных преобразований представить левую часть исходного уравнения, содержащую неизвестную величину в какой-либо степени, в виде произведения двух выражений, содержащих неизвестную величину в меньшей степени. При этом справа от знака равенства должен оказаться ноль. Проще всего уяснить эту идею на конкретном примере.

Пример 1

Решите уравнение методом разложения на множители: $2,5x^2 + 4x = 0$.

Решение:

осуществим разложение на множители (представим исходное выражение в виде произведения). Для этого вынесем переменную x за скобки:

$$x(2,5x + 4) = 0.$$

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно,

$$x = 0 \text{ или } 2,5x + 4 = 0.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$2,5x = -4 \text{ или } x = -1,6.$$

Ответ: $x = 0$ и $x = -1,6$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите уравнение методом разложения на множители: $3x^2 + 1,5x = 0$.

Метод замены переменной

Суть данного метода в том, чтобы удачным образом заменить сложное выражение, содержащее неизвестную величину, новой переменной, в результате чего уравнение принимает более простой вид. Далее полученное уравнение решается относительно новой переменной, после чего происходит возврат к исходной переменной. Все эти идеи проще осознать на конкретном примере.

Пример 2

Решите уравнение методом замены переменной: $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

Решение:

такие уравнения называются биквадратными. Перепишем его в виде:

$$(x^2)^2 + 4x^2 - 5 = 0.$$

Введем новую переменную $t = x^2$. Тогда исходное уравнение примет следующий простой вид:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Решая полученное квадратичное уравнение, получаем, что:

$$t = -5 \text{ или } t = 1.$$

Возвращаемся теперь к старой переменной (обратная замена):

$$x^2 = -5 \text{ или } x^2 = 1.$$

Решений у первого уравнения нет, поскольку не существует такого действительного числа, квадрат которого был бы отрицателен. Второе уравнение имеет два корня ± 1 .

Ответ: ± 1 .

Задача для самостоятельного решения №2. Решите уравнение методом замены переменной: $9x^4 - 24x^2 + 7 = 0$.

Пример 3

Решите уравнение методом замены переменной: $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$.

Решение:

обращаем внимание на то, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения. Следовательно, без потери или приобретения лишних корней можно разделить числитель и знаменатель обеих дробей на x . Тогда уравнение принимает вид:

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1.$$

Введем новую переменную: $t = 4x + \frac{7}{x}$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{4}{t - 8} + \frac{3}{t - 10} = 1.$$

Выполнив элементарные преобразования: приведем дроби к общему знаменателю, приведем подобные слагаемые, получим:

$$\frac{t^2 - 25t + 144}{(t - 8)(t - 10)} = 0.$$

Дробь равна нулю, если нулю равен ее числитель, а знаменатель при этом не равен нулю. То есть уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} t^2 - 25t + 144 = 0 \\ t \neq 8 \\ t \neq 10 \end{cases}.$$

Решив первое уравнение системы, имеем: $t = 16$ или $t = 9$.

Переходя к обратной подстановке, получаем:

1. $4x + \frac{7}{x} = 16$, что при $x \neq 0$ равносильно уравнению $4x^2 - 16x + 7 = 0$, решая

которое, получаем $x = \frac{1}{2}$ или $x = \frac{7}{2}$.

2. $4x + \frac{7}{x} = 9$ что при $x \neq 0$ равносильно уравнению $4x^2 - 9x + 7 = 0$, у которого

решений нет, поскольку его дискриминант отрицателен.

Ответ: $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите уравнение методом разложения на множители: $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$.

Контрольные вопросы:

1. В чем суть решения уравнения методом разложения на множители?
2. В чем суть решения уравнения методом замены переменной?

Практическая работа № 1.2

Решение неравенств методом интервалов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- правила решения простых, дробно-рациональных неравенств с одной переменной;

уметь:

- решать неравенства методом интервалов.

Сведения из теории:

Пусть заданное неравенство имеет вид: $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$. Для решения этого неравенства используется так называемый *метод интервалов*, который состоит в следующем.

1. На числовую ось наносят точки $x_1, \dots, x_n$ разбивающие ее на промежутки, в которых выражение $\frac{f(x)}{g(x)}$ определено и сохраняет знак («плюс» или «минус»). Такими точками могут быть корни уравнений $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$. Соответствующие этим корням точки отмечают на числовой оси: закрашенными кружками – точки, удовлетворяющие заданному неравенству, а светлыми кружками – не удовлетворяющие ему.

2. Определяют и отмечают на числовой оси знак выражения $\frac{f(x)}{g(x)}$ для значений, принадлежащих каждому из полученных промежутков. Достаточно определить знак функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ в любом таком промежутке, а в остальных промежутках знаки «плюс» и «минус» будут чередоваться.

Изменение знаков удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой (*кривой знаков*), проведенной через отмеченные точки и лежащей выше или ниже числовой оси в соответствии со знаком дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ в рассматриваемом промежутке. Промежутки, которые содержат точки, удовлетворяющие данному неравенству, иногда покрывают штрихами. Заштрихованная область в совокупности с полученными точками будет являться ответом к неравенству:

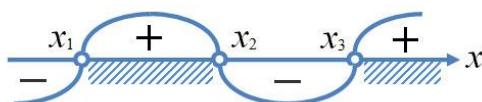


Рисунок 25. Кривая знаков

Пример 1

Решите неравенство: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} \leq \frac{1}{2}$.

Решение:

упрощаем неравенство путем равносильных преобразований: при умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$\frac{2 - (x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 5x + 6} \leq 0,$$

$$\frac{-x^2 + 5x - 4}{x^2 - 5x + 6} \leq 0,$$

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} \geq 0.$$

Выражения, стоящие в числителе и знаменателе, можно разложить на множители, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)} \geq 0.$$

Далее находим корни уравнений $(x-4)(x-1)=0$ и $(x-2)(x-3)=0$.

Из первого получаем $x_1=4$, $x_2=1$. Из второго получаем $x_3=2$, $x_4=3$.

Наносим на числовую прямую получившиеся точки, причем точки x_1 , x_2 обозначаем закрашенными кружочками (для них неравенство выполняется), а точки x_3 , x_4 светлыми (при этих значениях, выражение, стоящее слева от знака неравенства, не имеет смысла).

Определяем теперь знаки выражения $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$ на полученных промежутках (подставляем любое значение x из каждого полученного промежутка в данное выражение), изображаем кривую знаков, заштриховываем те промежутки, на которых исходное неравенство выполняется:

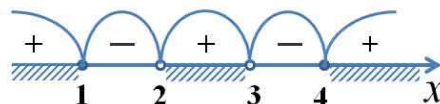


Рисунок 26. Кривая знаков выражения $\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-3)}$

Итак, исходному неравенству удовлетворяют следующие значения: $x \in (-\infty; 1] \cup (2; 3) \cup [4; +\infty)$.

Задача для самостоятельного решения №1. Решите неравенство: $\frac{x+17}{x^2-x-6} \geq 0$.

Пример 2

Решите неравенство: $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$.

Решение:

подкоренное выражение, как известно, не может принимать отрицательных значений, также не допускается нахождение в знаменателе дроби нуля. Следовательно, область допустимых значений данного неравенства определяется неравенством $x \geq 0$ и тем условием, что $x \neq 2$.

Решаем уравнения $\sqrt{x}-3=0$ и $x-2=0$.

Из первого уравнения получаем, что $x_1=9$.

Из второго уравнения получаем, что $x_2=2$.

Наносим область допустимых значений неравенства и полученные точки на числовую прямую, причем эти точки будут светлыми, поскольку ни одно из значений не удовлетворяет неравенству. Сразу определяем знаки выражения $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}$ в каждом из полученных промежутков и рисуем кривую знаков:

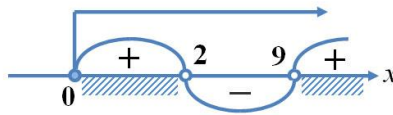


Рисунок 27. Кривая знаков выражения $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2}$

Верхней стрелкой на рисунке обозначена область допустимых значений неравенства. Ответом к неравенству будет являться промежуток, соответствующий на рисунке заштрихованной области.

Ответ: $x \in [0; 2) \cup (9; +\infty)$.

Задача для самостоятельного решения №2. Решите неравенство:

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$$

Пример 3

Решите неравенство: $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} < 2$.

Решение:

подкоренное выражение не может принимать отрицательных значений, а в знаменателе дроби не должно быть нуля. Следовательно, область допустимых значений неравенства определяется следующей системой:

$$\begin{cases} 1-8x^2 \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{8}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{8}}, \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Решаем уравнение $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} - 2 = 0$.

Получаем, что $x_1=0$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. Наносим полученные точки на числовую прямую, не забывая о том, какие из них следует закрасить, а какие осветлить. Изображаем также на ней область допустимых значений и изображаем кривую знаков:

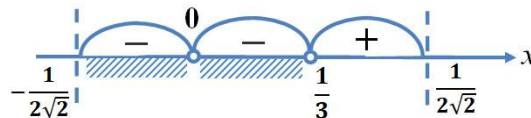


Рисунок 28. Кривая знаков выражения $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{x} - 2$

Пунктирные линии на рисунке ограничивают область допустимых значений неравенства. Заштрихованная область соответствует решению неравенства.

Ответ: $x \in \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Задача для самостоятельного решения №3. Решите неравенство: $\sqrt{2x+1} < \frac{2x+1}{2-x}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение неравенства с одной переменной.
2. В чем суть метода интервалов?

Практическое занятие № 1.3

Способы задания последовательностей, свойства числовых последовательностей

Цель работы:

студент должен:

знать:

- способы задания последовательностей;
- свойства числовых последовательностей;

уметь:

- вычислять члены последовательностей по общему члену;
- задавать формулой общий член последовательности.

Сведения из теории:

Числовая последовательность – функция вида $y=f(x)$, $x \in N$, где N – множество натуральных чисел (или функция натурального аргумента), обозначается $y=f(n)$ или $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

Значения $y_1, y_2, y_3, \dots$ называют соответственно первым, вторым, третьим, ... членами последовательности.

Пример 1

Вычислить первые три значения для функции $y=n^2$.

Решение:

подставляя в $y=n^2$ значения $n=1, n=2, n=3$ получим первые три значения функции:

$$y_1=1^2=1;$$

$$y_2=2^2=4;$$

$$y_3=3^2=9.$$

Способы задания последовательностей

Последовательности можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: аналитический, описательный и рекуррентный.

1. Последовательность задана аналитически, если задана формула ее n -го члена: $y_n=f(n)$.

Например, $y_n=2n-1$ – последовательность нечетных чисел: 1, 3, 5, 7, 9, ...

2. Описательный способ задания числовой последовательности состоит в том, что объясняется, из каких элементов строится последовательность.

Например, «Все члены последовательности равны 1». Это значит, речь идет о стационарной последовательности 1, 1, 1, ..., 1, ...

Или, например, «Последовательность состоит из всех простых чисел в порядке возрастания». Таким образом, задана последовательность 2, 3, 5, 7, 11, При таком способе задания последовательности в данном примере трудно ответить, чему равен, скажем, 1000-й элемент последовательности.

3. Рекуррентный способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило, позволяющее вычислить n -й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.

Например, $y_1=3; y_n=y_{n-1}+4$, если $n=2, 3, 4, \dots$

Здесь $y_1=3; y_2=3+4=7; y_3=7+4=11; \dots$

Можно видеть, что полученная в этом примере последовательность, может быть задана и аналитически: $y_n=4n-1$.

Пример 2

Вычислить следующие четыре члена последовательности $y_1=1; y_2=1; y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$.

Решение:

из формулы $y_n=y_{n-2}+y_{n-1}$ видно, что каждый следующий член последовательности равен сумме двух предыдущих, поэтому:

$$y_1=1; y_2=1; y_3=1+1=2; y_4=1+2=3; y_5=2+3=5; y_6=3+5=8.$$

Последовательность, составленную в этом примере, специально изучают в математике, поскольку она обладает рядом интересных свойств и приложений. Ее называют последовательностью Фибоначчи – по имени итальянского математика 13в. Задать формулой

последовательность Фибоначчи рекуррентно очень легко, а аналитически – очень трудно. n -е число Фибоначчи выражается через его порядковый номер следующей формулой:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Свойства числовых последовательностей

Числовая последовательность – частный случай числовой функции, поэтому ряд свойств функций рассматриваются и для последовательностей.

Последовательность $\{y_n\}$ называют *возрастающей*, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Последовательность $\{y_n\}$ называют *убывающей*, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином – *монотонные последовательности*.

Например, $y_1=1$; $y_n=n^2$ – возрастающая последовательность, а $y_1=1$; $y = \frac{1}{n}$ – убывающая последовательность.

Последовательность называется *периодической*, если существует такое натуральное число T , что начиная с некоторого n , выполняется равенство $y_n=y_{n+T}$. Число T называется длиной периода.

Например, последовательность $y_n=(-1)^n$ периодична с длиной периода $T=2$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{n}{n+1}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$	2 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$	3 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{1}{(3n-1)(2n+1)}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{4} - \frac{4}{9} + \frac{6}{16} - \frac{8}{25} + \dots$
4 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\sqrt[3]{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$	5 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{(n+1)!}{2n}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам:	6 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам:

	$\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$	$\frac{2}{5} - \frac{3}{8} + \frac{4}{11} - \frac{5}{14} + \dots$
7 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{2^n + 3}{2^{n+1}}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{1}{9} - \frac{1 \cdot 2}{25} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{49} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{81} + \dots$	8 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} + \dots$	9 вариант 1) Найдите первые пять членов последовательности, и определите ее вид по его заданному общему члену: $u_n = \frac{3^{-n}}{(2n+1)^2}$ 2) Найдите n -й член последовательности по ее данным первым членам: $\frac{2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{4}{8} + \frac{5}{16} - \dots$

Контрольные вопросы:

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Перечислите способы задания последовательностей.
3. Перечислите свойства числовых последовательностей.

Практическое занятие № 1.4

Повторение

Цель работы:

студент должен:

уметь

выполнять действия с числами
преобразовывать выражения
решать уравнения
решать неравенства

знать:

действия с алгебраическими выражениями и числами
свойства уравнений и неравенств

1 вариант

№ 1. Упростите выражения:

- 1) $(b + c)(b - c) - b(b - 2c)$;
- 2) $\frac{b}{a^2 - ab} \div \frac{b^2}{a^2 - b^2}$

№ 2. Решите уравнения:

- 1) $3 + x = 8x - (3x + 7)$
- 2) $16x^3 - 32x^2 - x + 2 = 0$
- 3) $\frac{5x+3}{2} = \frac{2x-7}{4}$
- 4) $5x^2 - 8x + 3 = 0$
- 5) $\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}$
- 6) $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$

2 вариант

№ 1. Упростите выражения:

- 1) $(a - c)(a + c) - c(3a - c)$;
- 2) $\frac{a^2}{a^2 - c^2} \div \frac{a}{c^2 + ac}$

№ 2. Решите уравнения:

- 1) $6x - 8 = 10x - (4 - x)$
- 2) $x^6 - x^4 + 5x^2 - 5 = 0$
- 3) $\frac{3x-4}{5} = \frac{2x+1}{2}$
- 4) $2x^2 - 9x + 10 = 0$
- 5) $\frac{2x+3}{2x-1} = \frac{x-5}{x+3}$
- 6) $\frac{2x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = 5$

№ 3. Решите неравенства:

- 1) $8 + 5x \leq 21 + 6x$
- 2) $\frac{5+6x}{2} < 3$
- 3) $x(x+7)(x+1)(x-4) < 0$
- 4) $2x^2 - 7x + 6 \geq 0$
- 5) $-5x^2 + 11x - 6 < 0$
- 6) $\frac{6x+1}{3+x} \geq 0$

№ 4. Вычислите:

- 1) $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 3 - 5\frac{1}{6}$
- 2) $0,125 : (\frac{3}{4} + \frac{5}{8}) \cdot 2,2$

№ 3. Решите неравенства:

- 1) $30 + 5x \geq 18 - 7x$
- 2) $\frac{3x-1}{4} > 2$
- 3) $x(x+1)(x+5)(x-8) > 0$
- 4) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$
- 5) $-x^2 + 2x + 15 > 0$
- 6) $\frac{5x-15}{x-4} \leq 0$

№ 4. Вычислите:

- 1) $2 \cdot 2\frac{2}{5} - 2\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{13}{15}$
- 2) $(2,125 \cdot 1\frac{15}{17} - 1\frac{7}{12}) : 7,25$

Практическое занятие № 44**Действия над комплексными числами****Цель работы:**

студент должен:

знать:

- алгебраическую форму комплексного числа;
- тригонометрическую форму комплексного числа;

уметь:

- выполнять действия над комплексными числами, представленными в различных формах.

Сведения из теории:

Алгебраическая форма комплексного числа

Обозначим $\sqrt{-1} = i$ и назовём мнимой единицей, ($i^2 = -1$). Тогда число вида $z = a + bi$, где a и b - любые действительные числа, назовём комплексным числом.

Здесь a - называют действительной частью комплексного числа, bi - называют мнимой частью, b - коэффициентом мнимой части комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме

Пусть даны два числа $z_1 = a_1 + b_1i$, и $z_2 = a_2 + b_2i$.

Для этих чисел понятия равенство и действия сложения, умножения определены следующим образом:

1) Два комплексных числа называются равными, если равны их действительная и мнимая части, т. е. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

2) Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

3) Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

4) Модулем комплексного числа называется длина вектора соответствующего этому комплексному числу на плоскости и вычисляется по формуле: $|\vec{z}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

5) Аргументом комплексного числа называется угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси и вычисляется по формуле: $\arg z = \arg(a + bi) = \phi + 2\pi k$. Т. о. для каждого комплексного числа можно указать бесконечное множество аргументов.

Для нахождения аргумента необходимо:

1. Определить в какой координатной четверти находится комплексное число.
2. Найти в этой четверти угол решив уравнение:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{b}{a}; \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \phi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 7.

Решите квадратное уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Решение:

вычислим корни квадратного уравнения через дискриминант:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16 \cdot (-1)}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2}.$$

$$x_1 = \frac{6 + 4i}{2} = \frac{2(3 + 2i)}{2} = 3 + 2i; \quad x_2 = 3 - 2i.$$

Получена пара взаимно - сопряжённых комплексных чисел $3 \pm 2i$, где $a = 3; b = 2$.

Заметим, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет ровно n корней, среди которых могут быть как действительные (различные или равные), так и комплексные (обязательно попарно взаимно – сопряжённые) корни.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $a + bi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме

Над комплексными числами в тригонометрической форме выполняются действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня n -ой степени.

Пусть даны два числа $z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$, тогда:

1) Произведением комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$.

2) Частным комплексных чисел называется комплексное число, которое вычисляется по формуле: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$.

3) Для возведения в степень: $z^n = r^n (\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$.

Пример 8.

Упростите: $\frac{1 + 2i^5}{1 + 3i^{21}}$.

Решение:

упростим дробь (понижим степень числителя и знаменателя), используя ($i^2 = -1$):

$$i^5 = i^4 i^1 = (i^2)^2 i = (-1)^2 i = i;$$

$$i^{21} = i^{20} i^1 = (i^2)^{10} i = (-1)^{10} i = i.$$

Подставим полученные выражения в исходную дробь и преобразуем её:

$$\frac{1 + 2i^5}{1 + 3i^{21}} = \frac{1 + 2i}{1 + 3i} = \frac{(1 + 2i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} = \frac{1 - 3i + 2i - 6i^2}{1 + 9} = \frac{1 - i + 6}{10} = \frac{7 - i}{10} = \frac{7}{10} - \frac{i}{10}.$$

Пример 9.

Вычислите: $(\sqrt{2}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ))^2 \cdot 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$.

Решение:

для первого комплексного числа используем формулу возведения в степень, а затем воспользуемся формулой произведения комплексных чисел:

$$2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot 2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) = 4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 4\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Для извлечения корня n -й степени из комплексного числа $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ используется формула:

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Пример 10.

Решите уравнение: $x^2 - 2x + 10 = 0$.

Решение:

для решения воспользуемся обычными формулами вычисления корней квадратных уравнений:

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 10,$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36.$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36 \cdot i^2}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = \frac{2(1 \pm 3i)}{2} = 1 \pm 3i.$$

Получили пару комплексных взаимно сопряженных корней.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^2$; 2) $4 + (1+i)^3 - (1-i)^3$; 3) $\frac{(2+3i)^2}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}$. №2. Решите уравнение: $x^2 - 6x + 13 = 0$.	2 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i^{15}}{1+3i^{21}}$; 2) $(1-i)^{10}$; 3) $\frac{4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{1-i^2}$. №2. Решите уравнение: $x^2 + 3x + 4 = 0$.
4 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1-2i^{23}}{1-3i}$; 2) $5 + (2+i)^2 - (1-i)^3$; 3) $\frac{2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{(\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ))}$. №2. Решите уравнение: $x^2 - 4x + 16 = 0$.	3 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{3+3i}{1+i^{15}}$; 2) $4 + (1+i)^3 - (1-i)^3$; 3) $4(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$. №2. Решите уравнение: $9x^2 + 12x + 29 = 0$.
5 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i^{11}}{1-3i^{23}}$; 2) $\frac{-\sqrt{2}+i^{45}}{i+i^{24}}$;	6 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1+2i}{i^9}$; 2) $\frac{(1-i^3)(2+i)}{3-i^{13}}$;

3) $\frac{4(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ)}{2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$. №2. Решите уравнение: $2,5x^2 + x + 1 = 0$.	3) $3(\cos \pi + i \sin \pi) \cdot 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. №2. Решите уравнение: $x^2 - 2x + 4 = 0$.
7 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $2 + 3i + (1 - i)^3$; 2) $(1 + i)^{10}$; 3) $\frac{2(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})}{i^{24} - i^2}$. №2. Решите уравнение: $x^2 - 4x + 13 = 0$.	8 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i^{14}}$; 2) $\frac{1 - i}{2i^{19}}$; 3) $\frac{(1 - 2i)^2}{2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})}$. №2. Решите уравнение: $4x^2 - 20x + 26 = 0$.
9 вариант №1. Выполните действия, вычислите аргумент и модуль комплексного числа: 1) $\frac{1 + 2i}{i^{17}}$; 2) $\frac{1 - i\sqrt{2}}{1 - i^{12}}$; 3) $\sqrt{2}(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$. №2. Решите уравнение: $x^2 - 2x + 26 = 0$.	

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение алгебраической форме комплексного числа.
2. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в алгебраической форме.
3. Дайте определение тригонометрической форме комплексного числа.
4. Перечислите действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

Практическое занятие № 45

Степени с действительными показателями, их свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные показательные тождества;
- свойства степеней с действительными показателями;

уметь:

- вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Повторим определения *понятия степени* с натуральным, нулевым, целым отрицательным и рациональным показателями:

$$\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ раз}}; a^{-n} = 1/(a^n); a^0 = 1, a \neq 0; a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m},$$

$$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Повторим свойства степеней с рациональным показателем:
при любых x и y справедливы равенства:

$$a^x a^y = a^{x+y};$$

$$a^x / a^y = a^{x-y};$$

$$\begin{aligned}(a^x)^y &= a^{xy}; \\ (ab)^x &= a^x b^x; \\ (a/b)^x &= a^x / b^x.\end{aligned}$$

Степень с действительным показателем

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y} = a^{(xk)/(yk)}$, $a > 0$, $y, k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$.
2. $a^x > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (любая степень положительного числа положительна).
3. $a^x > 1$ при $a > 1$, $x > 0$.
4. $a^x < 1$ при $a > 1$, $x < 0$.
5. $1^x = 1$ (любая степень единицы равна единице).
6. $a^x < 1$ при $0 < a < 1$, $x > 0$.
7. $a^x > 1$ при $0 < a < 1$, $x < 0$.
8. Если $a > 1$, $a \neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x = b$ при $b > 0$.
9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Кроме перечисленных свойств важно отметить три свойства, на которых основано решение простейших показательных уравнений и неравенств:

10. Если $a^x = a^y$, то $x = y$ при $a > 0$, $x, y \neq 1$.
11. Если $a^x < a^y$, то $x < y$ при $a > 0$.
12. Если $a^x < a^y$, то $x > y$ при $0 < a < 1$.

Правила действия над степенями с действительным показателем выражаются формулами (тождествами):

13. $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.
14. $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$.
15. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.
16. $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$ при $a > 0$, $b > 0$.
17. $|ab|^\alpha = |a|^\alpha |b|^\alpha$ при $ab > 0$.
18. $(a/b)^\alpha = a^\alpha / b^\alpha$ при $a > 0$, $b > 0$.
19. $|a/b|^\alpha = |a|^\alpha / |b|^\alpha$ при $ab > 0$.

Формулы, обратные формулам 1-7, так же верны.

Пример 1

Вычислите:
$$\frac{7^{-1} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2}}{5^{-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Решение:

упростим заданное выражение, используя свойства степеней:

$$\begin{aligned}\frac{7^{-1} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}} - 64^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-2}}{5^{-1} - \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\frac{1}{7} \cdot 49^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{5} - 9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{7} \sqrt{49} - \sqrt{\frac{1}{64}} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} - \sqrt{9}} = \frac{\frac{1}{7} \cdot 7 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} - 3} = \\ &= \frac{1 - \frac{1}{72}}{-2\frac{4}{5}} = \frac{\frac{72}{72} - \frac{1}{72}}{-\frac{14}{5}} = \frac{\frac{71}{72}}{\left(-\frac{14}{5}\right)} = \frac{71}{72} \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) = -\frac{355}{1008}.\end{aligned}$$

Пример 2.

Вычислите: $\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 2^{-1}}{64^{0,25} \cdot 2^{0,5}}.$

Решение:

упростим заданное выражение, используя свойства степеней:

$$\begin{aligned} \frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 2^{-1}}{64^{0,25} \cdot 2^{0,5}} &= \frac{(2^3)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}}{(2^6)^{0,25} \cdot 2^{0,5}} = \frac{2^{-2} \cdot \sqrt{\frac{1}{25}} - \frac{1}{2}}{2^{1,5} \cdot 2^{0,5}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{2^2} = \frac{\frac{1}{20} - \frac{1}{2}}{4} = \\ &= -\frac{\frac{9}{20}}{4} = -\frac{9}{80}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Вычислите: 1) $2 \cdot 2^{-3}$; 2) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 27^2}{3}$. №2. Упростите: $b^{\frac{1}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}}$.	2 вариант №1. Вычислите: 1) $5^{-2} \cdot 5$; 2) $\frac{(2^{-2})^4 \cdot 16^2}{2^3}$. №2. Упростите: $a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{4}}$.	3 вариант №1. Вычислите: 1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; 2) $3\sqrt{-27} + 0,1\sqrt[4]{81} - \sqrt{1}$. №2. Упростите: $x^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}}$.
4 вариант №1. Вычислите: 1) $(\sqrt{5})^{-8}$; 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. №2. Упростите: $\left(y^{-\frac{3}{4}}\right)^4 y^{\frac{5}{2}}$.	5 вариант №1. Вычислите: 1) $5 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$; 2) $(\sqrt[3]{5})^{-12}$. №2. Упростите: $\frac{c^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{2}}}{c^{\frac{1}{6}}}$.	6 вариант №1. Вычислите: 1) $36^{\frac{1}{2}} \cdot 2$; 2) $\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt[4]{4}}$. №2. Упростите: $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} x^{\frac{2}{3}}$.
7 вариант №1. Вычислите: 1) $16^{-\frac{1}{2}}$; 2) $5\sqrt[4]{16} - 0,2\sqrt[3]{-0,027} + \sqrt[5]{1}$. №2. Упростите: $a^{\frac{7}{2}} \sqrt{a}$.	8 вариант №1. Вычислите: 1) $27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[5]{32 \cdot 0,00001}$. №2. Упростите: $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y}$.	9 вариант №1. Вычислите: 1) $\sqrt[4]{0,0001 \cdot 16}$; 2) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$. №2. Упростите: $2\sqrt[3]{\sqrt{a}} - \sqrt[6]{ab} : \sqrt[6]{b}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Практическое занятие № 43**Действия со степенями****Цель работы:**

студент должен:
 знать:

- основные показательные тождества;
- свойства степеней с действительными показателями;
- уметь:
- вычислять степени с действительными показателями.

Сведения из теории:

Свойства степеней с действительным показателем:

1. $a^{x/y} = a^{(xk)/(yk)}$, $a > 0$, $y, k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$.
2. $a^x > 0$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (любая степень положительного числа положительна).
3. $a^x > 1$ при $a > 1$, $x > 0$.
4. $a^x < 1$ при $a > 1$, $x < 0$.
5. $1^x = 1$ (любая степень единицы равна единице).
6. $a^x < 1$ при $0 < a < 1$, $x > 0$.
7. $a^x > 1$ при $0 < a < 1$, $x < 0$.
8. Если $a > 1$, $a \neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x = b$ при $b > 0$.
9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Так же при упрощении выражений, содержащих степени пользуются формулами: $a^0 = 1$, $a \neq 0$;
 $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Пример 1

Решить уравнение: $x^5 = 11$.

Решение:

т.к. степень уравнения 5 – нечетное число, то уравнение имеет один корень: $x = \sqrt[5]{11}$.

Пример 2

Упростите: $\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5}$.

Решение:

используя свойства степеней, имеем:

$$\frac{2a^3b^8c^4}{6a^4b^{-3}c^5} = \frac{a^{3-4}b^{8-(-3)}c^{4-5}}{3} = \frac{a^{-1}b^{11}c^{-1}}{3} = \frac{b^{11}}{3ac}.$$

Пример 3

Вычислите: $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$.

Решение:

используя свойства степеней, имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7+\sqrt{17}} &= \sqrt[5]{(7-\sqrt{17})(7+\sqrt{17})} = \sqrt[5]{7^2 - (\sqrt{17})^2} = \sqrt[5]{49-17} = \\ &= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Вычислите: $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} + \sqrt[4]{\frac{16}{625}} - \sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$. 2) Решить уравнение: $x^3 = 11$. 3) Упростите: $\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{b}} + 2\sqrt{\sqrt{a}}$.	2 вариант 1) Вычислите: $\frac{1}{2}\sqrt[3]{-27} + 5\sqrt[4]{0,0081} + 3\sqrt[8]{1}$. 2) Решить уравнение: $x^8 + 24 = 0$. 3) Упростите: $\sqrt[4]{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[4]{3-\sqrt{5}}$.	3 вариант 1) Вычислите: $2,5\sqrt[6]{64} + 10\sqrt[3]{-0,125} + 8\sqrt[10]{1}$. 2) Решить уравнение: $x^4 = 16$. 3) Упростите: $\frac{3a^{\frac{1}{2}} - a}{3 - a^{\frac{1}{2}}}$.
4 вариант 1) Вычислите: $\frac{3}{5}\sqrt[4]{81} + 4\sqrt[9]{-1} - 9\sqrt[3]{0,008}$.	5 вариант 1) Вычислите: $27^{\frac{2}{3}} - 81^{\frac{3}{4}} + 64^{\frac{2}{3}} - 32^{\frac{2}{5}}$.	6 вариант 1) Вычислите:

2) Решить уравнение: $x^4 = 80$. 3) Упростите: $\frac{b + 7b^{0,5}}{7 + b^{0,5}}$.	2) Решить уравнение: $x^6 = -18$. 3) Упростите: $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$.	$16^{0,75} + 4 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$. 2) Решить уравнение: $2x^3 - 128 = 0$. 3) Упростите: $\frac{a - 2a^{0,5}b^{0,5} + b}{a + b}$.
7 вариант 1) Вычислите: $8^{\frac{2}{3}} - 3 \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{0,5}$. 2) Решить уравнение: $64x^3 = 1$. 3) Упростите: $(a^{\frac{3}{4}})^{-4} a^{-\frac{3}{2}}$.	8 вариант 1) Вычислите: $81^{0,25} + 4 \cdot (0,25)^{\frac{1}{2}}$. 2) Решить уравнение: $x^5 + 32 = 0$. 3) Упростите: $\frac{x^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.	9 вариант 1) Вычислите: $125^{\frac{1}{3}} - 5 \cdot (0,16)^{\frac{1}{2}}$. 2) Решить уравнение: $x^3 + 8 = 0$. 3) Упростите: $\sqrt[4]{6 + \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 - \sqrt{20}}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные показательные тождества.
2. Перечислите свойства степеней с действительными показателями.

Практическое занятие № 2

Преобразование выражений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- правила преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений;

уметь:

- выполнять преобразования рациональных, иррациональных, степенных выражений.

Сведения из теории:

Преобразование алгебраических выражений, используя приведение дробей к общему знаменателю, формулы сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $a \neq 0$, x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Основное свойство дроби и действия над дробями

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \text{ где } b \neq 0, c \neq 0;$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c};$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Пример 1

Упростите: $\left(\frac{a^3 + b^3}{a + b}\right) \div (a^2 - b^2) + \frac{2b}{a + b} - \frac{ab}{a^2 - b^2}.$

Решение:

решаем по действиям: 1) деление; 2) сложение; 3) вычитание.

1) Используя формулы сокращенного умножения разности квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, суммы кубов $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, получим:

$$\left(\frac{a^3 + b^3}{a + b}\right) \div (a^2 - b^2) = \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{a + b} \cdot \frac{1}{(a - b)(a + b)} = \frac{(a^2 - ab + b^2)}{(a - b)(a + b)};$$

2) Для сложения приведем дроби к общему знаменателю $(a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - ab + b^2)}{(a - b)(a + b)} + \frac{2b}{a + b} &= \frac{a^2 - ab + b^2 + 2b(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \\ &= \frac{a^2 - ab + b^2 + 2ab - 2b^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{a^2 + ab - b^2}{a^2 - b^2}. \end{aligned}$$

3) Выполним вычитание дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a^2 + ab - b^2}{a^2 - b^2} - \frac{ab}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + ab - b^2 - ab}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

Преобразование выражений, содержащих радикалы

Чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе необходимо и числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же число, сопряженное к знаменателю.

Пример 2

Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}.$

Решение: чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе необходимо и числитель и знаменатель дроби помножить на одно и то же число, сопряженное к знаменателю: $(\sqrt{3} - \sqrt{5})$, тогда получим:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{3 - 5} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{10}}{-2}.$$

Решение иррациональных уравнений

Наиболее часто используемым при решении иррациональных уравнений способов является возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Пример 3

Решите уравнение: $\sqrt{x - 3} = x - 9.$

Решение: возведем обе части уравнения в квадрат, при этом в уравнении появятся посторонние корни, поэтому проверка при решении иррациональных уравнений обязательна:

$$(\sqrt{x-3})^2 = (x-9)^2;$$

$$x-3 = x^2 - 18x + 81;$$

$$x^2 - 18x + 81 - x + 3 = 0;$$

$$x^2 - 19x + 84 = 0.$$

Получилось обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант: $x_1=12, x_2=7$.

Выполним проверку, для этого подставим в наше исходное уравнение получившиеся корни:

$$\begin{aligned} x_1=12: \quad & \sqrt{12-3} = 12-9; \\ & 3 = 3 \text{ (верно)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2=7: \quad & \sqrt{7-3} = 7-9; \\ & 2 = -2 \text{ (не верно)}. \end{aligned}$$

Ответ: 12.

1 вариант №1. Упростите: $\left(m + n - \frac{4mn}{m+n}\right) \div \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2}\right).$ №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{7}}.$ №3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x} = x - 6.$	2 вариант №1. Упростите: $\left(\frac{x}{x^2-4} - \frac{8}{x^2+2x}\right) \cdot \left(\frac{x^2-2x}{4-x}\right) + \frac{x+8}{x+2}.$ №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{7}}.$ №3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}.$
3 вариант №1. Упростите: $\left(\frac{3}{2x-y} - \frac{2}{2x+y} - \frac{1}{2x-5y}\right) \div \frac{4y^2}{4x^2-y^2}.$ №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}}.$ №3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x+2} = x - 4.$	4 вариант №1. Упростите: $\frac{3a^2 + 3ab + 3b^2}{4a + 4b} \cdot \frac{2a^2 - 2b^2}{9a^3 - 9b^3}.$ №2. Освободитесь от иррациональности в знаменателе: $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11} + \sqrt{5}}.$ №3. Решите иррациональное уравнение: $\sqrt{x^2-12} = \sqrt{x}.$

Контрольные вопросы:

1. Какие формулы можно использовать при преобразовании алгебраических выражений?
2. Как можно освободиться от иррациональности в знаменателе?
3. Сформулируйте правила решения иррациональных уравнений.

Практическая работа №3 Методические рекомендации.

Определение

Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -ая степень которого равна a .

Примеры

1. $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4 > 0$ и $4^3 = 64$ 2. $\sqrt[3]{125} = 5$, так как $5 > 0$ и $5^3 = 125$

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^n = a$ и $\sqrt[n]{a^n} = a$

Свойства арифметического корня:

Арифметический корень n -ой степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и n, m - натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Корень нечётной степени из отрицательного числа a вычисляется следующим образом:

$\sqrt[2k+1]{a} = - \sqrt[2k+1]{|a|}$

Например, $\sqrt[5]{-32} = - \sqrt[5]{2^5} = -2$

Примеры применения свойств арифметического корня.

1. $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \cdot 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
2. $\sqrt[3]{\frac{256}{625}} : \sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{256}{625} : \frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$
3. $\sqrt[7]{5^{21}} = \sqrt[7]{(5^3)^7} = 5^3 = 125$
4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$
5. $(\sqrt[4]{9})^{-2} = \sqrt[4]{9^{-2}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$

Упростить выражение $\frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$, где $a > 0$, $b > 0$.

Используя свойства арифметического корня, полу-

чаем $\frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}} = \frac{a^3 b^2}{\sqrt[6]{a^{12} b^6}} = \frac{a^3 b^2}{a^2 b} = ab. \triangleleft$

1 вариант

Тема: Выполнение тождественных преобразований над арифметическими корнями натуральной степени.

Цель: Повторение и систематизация знаний.

1. **Вычислить:** а) $\sqrt[5]{3^{10} \cdot 2^{15}}$; б) $\sqrt[4]{3^{12} \cdot (\frac{1}{3})^8}$
2. **Упростить выражение:** а) $(\sqrt[3]{y^2})^3$; б) $(\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{b^3})^{12}$;
3. **Вычислить:** а) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$; б) $\sqrt[3]{11 - \sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11 + \sqrt{57}}$; в) $(\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}}) : \sqrt[3]{2}$

4. Упростить выражение: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}} + \left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$

5. Упростить выражение: а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ б) $\frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} - \frac{x+y}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

2 вариант

Тема: Выполнение тождественных преобразований над арифметическими корнями натуральной степени.

Цель: Повторение и систематизация знаний.

1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^6}$ б) $\sqrt[10]{4^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$

2. Упростить выражение: ; а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; б) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b})^6$

3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}}$; б) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$; в) $(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

4. Упростить выражение: $\sqrt[3]{\sqrt{x^6y^{12}}} - \left(\sqrt[5]{xy^2}\right)^5$

5. Упростить выражение: а) $\frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$

Практическое занятие № 4

Десятичные и натуральные логарифмы

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение логарифма;
- свойства логарифмов;

уметь:

- вычислять логарифмы по любому основанию.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b , т.е. $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a > 0$ ($a \neq 1$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $\log_a 1 = 0$.

3. $\log_a a = 1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $\log_a x^k = k \log_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$\log_b x = \log_b(a^{\log_a x})$, откуда $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

С помощью формулы перехода можно найти значение логарифма с произвольным основанием a , имея таблицы логарифмов, составленные для какого-нибудь одного основания b . Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов (десятичными называют логарифмы по основанию 10 и обозначают lg , а натуральными логарифмами называют логарифмы по основанию $e \sim 2,72$ и обозначают ln).

Пример 1

Вычислите $\log_{0,3} 7$.

Решение:

воспользуемся формулой перехода к новому основанию и перейдем к основанию 10:

$$\log_a x = \log_b x / \log_b a$$

$$\log_{0,3} 7 = \log_{10} 7 / \log_{10} 0,3 = lg 7 / lg 0,3.$$

Пользуясь калькулятором или специальными таблицами, например, таблицей В.М. Брадиса, находим значение $lg 7 = 0,8451$.

Используя 5 и 3 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg 0,3 = lg(3/10) = lg 3 - lg 10 = 0,4771 - 1 = -0,5229.$$

$$\text{Итак, } \log_{0,3} 7 = 0,8451 / (-0,5229) = -1,6162.$$

Пример 2

Вычислите: $(lg 72 - lg 9) / (lg 28 - lg 7)$.

Решение:

используя 5 и 6 свойства логарифмов, вычисляем

$$lg 72 - lg 9 = lg(72/9) = lg 8 = lg 2^3 = 3lg 2;$$

$$lg 28 - lg 7 = lg(28/7) = lg 4 = lg 2^2 = 2lg 2.$$

Итак,

$$(lg 72 - lg 9) / (lg 28 - lg 7) = (3lg 2) / (2lg 2) = 3/2 = 1,5.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Вычислите $\log_{0,2} 5$. 2) Дано: $lg 3 = a, lg 5 = b$. Вычислите: $\log_{15} 30$.	2 вариант 1) Вычислите $\log_3 0,1$. 2) Вычислите: $\frac{1}{2} lg 9 - \frac{2}{3} lg 8$.	3 вариант 1) Вычислите $\log_{0,5} 1$. 2) Дано: $\log_7 2 = m$. Вычислите: $\log_{49} 28$.
4 вариант 1) Вычислите $\log_{0,7} 4$. 2) Вычислите: $\log_{\frac{1}{12}} 144 - lg 1000 +$ $+ 7^{-\log_7 9}$	5 вариант 1) Вычислите $\log_{0,2} 9$. 2) Вычислите: $lg x = 2 lg 3 + 3 lg 2$.	6 вариант 1) Вычислите $\log_{0,3} 10$. 2) Вычислите: $\log_5 (3\sqrt{3} + \sqrt{2}) +$ $+ \log_5 (3\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
7 вариант 1) Вычислите $\log_{0,3} 70$. 2) Вычислите: $2 \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{3} + 1) -$ $- \log_{\frac{1}{2}} (\sqrt{3} + 2)$	8 вариант 1) Вычислите $\log_{0,3} 20$. 2) Вычислите: $\frac{lg^2 7 - 1}{lg 70}$.	9 вариант 1) Вычислите $\log_{0,3} 30$. 2) Вычислите: $\log_7 (5\sqrt{2} - 1) +$ $+ \log_7 (1 + 5\sqrt{2})$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите свойства логарифмов.

Практическое занятие № 5

Преобразование логарифмических выражений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение логарифма числа;
- формулы основного логарифмического тождества, логарифма произведения, частного, степени, перехода от одной системы логарифмов к другой;

уметь:

- вычислять значения несложных логарифмических выражений.

Сведения из теории:

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b , т.е. $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$) называют *основным логарифмическим тождеством*.

При любом $a > 0$ ($a \neq 1$) и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $\log_a 1 = 0$.

3. $\log_a a = 1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $\log_a x^k = k \log_a x$.

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразования выражений, содержащих логарифмы. Среди них формула перехода к новому основанию: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$. Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т.е. при $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$).

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x})$, откуда $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$. Эту формулу так же можно использовать для упрощения выражений.

Пример 1

Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13} \sqrt[5]{169} + \log_{11} \sqrt[3]{121}$.

Решение:

вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\log_{13} \sqrt[5]{169} = x,$$

$$\log_{11} \sqrt[3]{121} = x,$$

$$13^x = \sqrt[5]{169},$$

$$11^x = \sqrt[3]{121},$$

$$13^x = \sqrt[5]{13^2},$$

$$11^x = \sqrt[3]{11^2},$$

$$13^x = 13^{\frac{2}{5}},$$

$$11^x = 11^{\frac{2}{3}},$$

$$x = \frac{2}{5}.$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Вернемся в пример: } \log_{13} \sqrt[5]{169} + \log_{11} \sqrt[3]{121} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{6+10}{15} = \frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15}.$$

Пример 2

Вычислите, используя основное логарифмическое тождество: $10^{3\lg 2 - 1}$.

Решение:

используя свойство степени, разложим данное выражение на множители:

$$10^{3\lg 2 - 1} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{-1}.$$

Используя 6 свойство логарифма степени, имеем:

$$10^{3\lg 2 - 1} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{-1} = 10^{\lg 2^3} \cdot \frac{1}{10}.$$

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$10^{3\lg 2 - 1} = 10^{3\lg 2} \cdot 10^{-1} = 10^{\lg 2^3} \cdot \frac{1}{10} = 2^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите:

1 вариант 1) $\log_{16} 0,5$; 2) $100^{\lg \sqrt{5}}$; 3) $\frac{\lg 4}{\lg 64 - \lg 8}$.	2 вариант 1) $\log_{64}(1/16)$; 2) $5^{-6\log_5 2}$; 3) $\frac{\lg 4}{\lg 16 - \lg 8}$.	3 вариант 1) $\log_4 8^7$; 2) $36^{0,5 - \log_6 \sqrt{5}}$; 3) $\frac{\lg 3 + \lg 27}{\lg 9}$.
4 вариант 1) $\log_{0,2} 0,08$; 2) $49^{\frac{1}{2} + \log_7 2}$; 3) $\frac{\lg^2 7 - 1}{\lg 70}$.	5 вариант 1) $\lg 0,01$; 2) $4^{\log_2 3 + 2\log_4 \sqrt{3}}$; 3) $\frac{1 - \lg^2 3}{\lg 30}$.	6 вариант 1) $\log_5 0,04$; 2) $0,01^{\lg \sqrt{5}}$; 3) $\frac{\log_2 64}{\log_2 \sqrt{16}}$.
7 вариант 1) $\log_{\sqrt{2}} 8$; 2) $25^{\log_5 3 - \log_{25} 27}$; 3) $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$.	8 вариант 1) $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27$; 2) $100^{\lg \sqrt{5} + \lg 10}$; 3) $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$.	9 вариант 1) $\log_3 \frac{1}{243}$; 2) $1000^{\lg 10 - \lg \sqrt{5}}$; 3) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16} + \frac{\log_5 27}{\log_5 9}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение логарифма числа.
2. Перечислите свойства логарифмов.

Практическое занятие № 46.1

Радианная мера угла. Вращательное движение

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определения радиана, синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента;

- значения тригонометрических функций некоторых аргументов;

- знаки значений тригонометрических функций по координатным четвертям;

уметь:

- переводить значения углов из радианной меры угла в градусную меру и наоборот;

- вычислять простейшие тригонометрические выражения.

Сведения из теории:

Радианная мера

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью $180^0 = \pi$ радиан; угол в $n^0 = \frac{\pi}{180^0}$ радиан.

Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 30^0 , 45^0 , 60^0 .

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

Номер координатной четверти	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	–	+	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	–	+	–

Единственная четная функция – косинус

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Все остальные основные тригонометрические функции нечетные:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Таблица 2. Значения основных тригонометрических функций

Радианная мера угла	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Градусная мера угла	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Радианная мера угла	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Градусная мера угла	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
$\sin \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

$\cos \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Пример 1.

Вычислите: $\sin 405^\circ$.

Решение:

полный круг – 360° можно «отбросить»:

$$\sin 405^\circ = \sin(405^\circ - 360^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2

Выразите в радианной мере значение угла 36° .

Решение:

чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо заданное значение

умножить на $\frac{\pi}{180^\circ}$, т.о. получим

$$36^\circ = \frac{36^\circ \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5}.$$

Пример 3

Выразите в градусной мере значение угла $\frac{2\pi}{5}$.

Решение:

чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо заданное значение

умножить на $\frac{180^\circ}{\pi}$, т. о. получим

$$\frac{2\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 60° ; $\frac{\pi}{6}$. №2. Вычислите: $\sin 2010^\circ + 4\operatorname{tg}(-855^\circ) + \sqrt{3}\cos(-1590^\circ)$.	2 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 180° ; $\frac{3\pi}{5}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - 6\cos\left(-\frac{22\pi}{3}\right) + 2\operatorname{tg}\frac{15\pi}{4} - \sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{23\pi}{6}$.	3 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 270° ; $\frac{5\pi}{36}$. №2. Вычислите: $\sin(-390^\circ) + 4\operatorname{tg}(-405^\circ) + \sqrt{3}\cos^2(-420^\circ)$.
4 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 120° ;	5 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение	6 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 360° ;

$\frac{3\pi}{4}$. №2. Вычислите: $\sin 1500^\circ + \operatorname{tg}(-765^\circ) +$ $+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(1845^\circ)$.	угла: $310^\circ; \frac{\pi}{3}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2} \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - 6 \cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) +$ $+ 2 \operatorname{tg} \frac{9\pi}{4} - \sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$.	$\frac{5\pi}{4}$. №2. Вычислите: $\cos 2160^\circ + \operatorname{ctg}(855^\circ) +$ $+ \sqrt{3} \sin(-1590^\circ)$.
7 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: $1500^\circ; \frac{3\pi}{18}$. №2. Вычислите: $\sin 2190^\circ + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(-405^\circ) +$ $+ \sqrt{3} \cos(-420^\circ)$.	8 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: $216^\circ; \frac{7\pi}{12}$. №2. Вычислите: $\sqrt{2} \sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) - 6 \cos^2\left(\frac{22\pi}{3}\right) +$ $+ 2 \operatorname{tg}\left(-\frac{15\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{3}$.	9 вариант №1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: $90^\circ; \frac{9\pi}{5}$. №2. Вычислите: $\cos 405^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg}(750^\circ) +$ $+ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2(-1590^\circ)$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется углом в 1 радиан?
2. В каких единицах измеряются углы?
Перечислите значения некоторых тригонометрических функций

Практическое занятие № 46.2

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные тригонометрические тождества;
- формулы приведения;

уметь:

- выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя основные тригонометрические тождества, формулы приведения.

Сведения из теории:

Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}; \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Из формул сложения, полагая $\beta = \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Пример 1

Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, имеем:

$$0,4^2 + 0,7^2 = 0,16 + 0,49 = 0,65.$$

Т.к. $0,65 \neq 1$ значения синуса и косинуса одного и того же числа не могут быть равными соответственно: 0,4 и 0,7.

Пример 2

Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha = -0,8$ и $\pi < \alpha < 1,5\pi$.

Решение:

используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, имеем:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha, \text{ тогда } \cos^2\alpha = 1 - (-0,8)^2 = 1 - 0,64 = 0,36.$$

Т. к. $\pi < \alpha < 1,5\pi$ (III координатная четверть), то $\cos\alpha = -0,6$.

По формуле $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ вычисляем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-0,8}{-0,6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

По формуле $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ вычисляем $\operatorname{ctg}\alpha = 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4}$.

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,5 и 0,5. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,2 и -0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.	1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: 0,6 и -0,8. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

4 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = 0,5$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	5 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = 0,4$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	6 вариант 1) Могут ли синус и косинус одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
7 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $-\frac{3}{5}$ и $-\frac{5}{3}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	8 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $2,4$ и $-\frac{5}{12}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\sin \alpha = 0,7$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	9 вариант 1) Могут ли тангенс и котангенс одного и того же числа быть равными соответственно: $\frac{\sqrt{5}}{2}$ и $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 2) Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если: $\cos \alpha = 0,9$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
Сформулируйте мнемоническое правило

Практическое занятие № 6.1

Преобразование простейших тригонометрических выражений. Решение простейших тригонометрических уравнений. Синус, косинус двойного угла

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы двойного угла тригонометрических функций;
- формулы половинного аргумента тригонометрических функций;
- формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

уметь:

- выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя формулы двойного угла.
- решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сведения из теории:

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Подставляя в формулы $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$ и $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ значение $t = \frac{\alpha}{2}$, получаем формулы *половинного аргумента*:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

Разделив $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$ на $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$ получаем формулу

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Пример 1

Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла, $\sin 42^\circ$.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, имеем
 $\sin 42^\circ = \sin(2 \cdot 21^\circ) = 2 \sin 21^\circ \cos 21^\circ$.

Пример 2.

Вычислите $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, имеем
 $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin(2 \cdot 15^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5$.

Пример 3

Вычислите $\sin(\pi/12)$.

Решение:

по формуле $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$, имеем

$$\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \approx 0,068.$$

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\sin 54^\circ$. 2) Вычислите: $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 75^\circ}{2 \operatorname{tg} 75^\circ}$.	2 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$. 2) Вычислите: $\frac{2 \operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'}$.	3 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\cos 16^\circ$. 2) Вычислите: $\frac{2 \operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$.
--	--	--

4 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\operatorname{ctg} \frac{5}{2} \pi$. 2) Вычислите $\cos \alpha$, если $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{24}{25}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	5 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\sin \frac{7}{12} \pi$. 2) Вычислите $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.	6 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\operatorname{tg} 68^\circ$. 2) Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
7 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\cos \frac{5}{4} \pi$. 2) Вычислите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	8 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\operatorname{ctg} 102^\circ$. 2) Вычислите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.	9 вариант 1) Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла: $\operatorname{tg} 162^\circ$. 2) Вычислите $\cos \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Практическое занятие № 6.2

Преобразование простейших тригонометрических выражений. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Цель работы:

студент должен:

знать:

формулы для решения тригонометрических уравнений в общем виде и частные случаи решения;

уметь:

решать простейшие тригонометрические уравнения.

Сведения из теории:

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $\cos t = a$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то уравнение $\cos t = a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t| \leq 1$ для любого t .

Пусть $|a| \leq 1$. Надо найти все такие числа t , что $\cos t = a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t = a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t = a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t = \pm \arccos a$ (совпадающие при $a = 1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t = a$ имеет вид:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Пример 1

Решите уравнение: $\cos t = 1/2$.

Решение:

по формуле $t = \pm \arccos (1/2) + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ приходим к ответу $t=\pm \pi/3+2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Пример 5.

Решите уравнение: $\cos t=-0,2756$.

Решение:

по формуле $t=\pm \arccos(-0,2756)+2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Значение $\arccos(-0,2756)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.

Итак, приходим к ответу $t=\pm 1,85+2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Пример 6

Решите уравнение: $\cos(2x-\pi/4)=1/2$.

Решение:

по формуле

$2x-\pi/4=\pm \arccos(1/2)+2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Поскольку $\arccos(1/2)=\pi/3$ получаем

$2x-\pi/4=\pm \pi/3+2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$

$2x=\pi/4 \pm \pi/3+2\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x=\pi/8 \pm \pi/6+\pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Уравнение $\sin t=a$

Очевидно, что если $|a|>1$, то уравнение $\sin t=a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t| \leq 1$ для любого t .

При $|a| \leq 1$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение $\sin t=a$ имеет одно решение $t_1=\arcsin a$. На отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число $t_2=\pi-\arcsin a$, т.к. $\sin t_2=\sin(\pi-t_1)=\sin t_1=a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2 \leq t_1 \leq \pi/2$,

имеем $-\pi/2 \leq -t_1 \leq \pi/2$

и $\pi-\pi/2 \leq \pi-t_1 \leq \pi+\pi/2$,

т.е. $\pi/2 \leq t_2 \leq 3\pi/2, t_2 \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

Итак, уравнение $\sin t=a$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1=\arcsin a$ и $t_2=\pi-\arcsin a$ (совпадающие при $a=1$). Учитывая, что период синуса равен 2π , получаем формулу для решения уравнения $\sin t=a$:

$$t=(-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 7

Решите уравнение: $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k \arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$.

Поскольку $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})=\pi/4$ приходим к ответу $t=(-1)^k \pi/4 + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$.

Пример 8

Решите уравнение: $\sin t=0,3714$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k \arcsin(0,3714) + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$.

Значение $\arcsin(0,3714)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 0,3805.

Итак, приходим $t=(-1)^k 0,3805 + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$.

Пример 9

Решите уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$.

Т.к. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, (k \in \mathbb{Z})$$

или

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{10} + (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k, (k \in \mathbb{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x = \frac{\pi}{5} + (-1)^{k+1} \left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi k, (k \in \mathbb{Z}).$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

При любом a на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ существует одно число t , что $\operatorname{tg} t = a$, – это $\operatorname{arctg} a$. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π . Следовательно, остальные корни уравнения $\operatorname{tg} t = a$ отличаются от найденного на $\pi n, (n \in \mathbb{Z})$, т.е.

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Пример 10

Решите уравнение: $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$.

Решение:

по формуле $t = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Поскольку $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ приходим к ответу $t = \frac{\pi}{3} + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Пример 11

Решите уравнение: $\operatorname{tg} t = 5,177$.

Решение:

по формуле $t = \operatorname{arctg}(5,177) + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Значение $\operatorname{arctg}(5,177)$ находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,38.

Итак, приходим $t = 1,38 + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Сводная таблица решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Решение
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Частные случаи решения простейших тригонометрических уравнений

Уравнение	Частные случаи		
	$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x=a$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x=a$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x=a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x=a$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 3) $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.	2 вариант 1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}$.	3 вариант 1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$; 2) $2 \cos x = \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
4 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{4} = \frac{4}{5}$; 3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) = 0$.	5 вариант 1) $\sin x = \frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x) = \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$.	6 вариант 1) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$; 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -\sqrt{3}$.
7 вариант 1) $2 \sin x = -\sqrt{2}$; 2) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3 \operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.	8 вариант 1) $2 \sin 2x = -1$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.	9 вариант 1) $2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$; 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}(2x + 45^\circ) = -1$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы двойного угла тригонометрических функций.
2. Запишите формулы половинного аргумента тригонометрических функций.
3. Перечислите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений в общем виде.
4. Перечислите формулы частных случаев решения простейших тригонометрических уравнений.

Практическое занятие № 7

Преобразование тригонометрических выражений . Решение простейших тригонометрических неравенств.

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение;
- формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму;
- формулы для решения простейших тригонометрических неравенств;

уметь:

- выполнять преобразования тригонометрических выражений, используя тригонометрические тождества
- решать простейшие тригонометрические неравенства.

Сведения из теории:

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 1

Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x \sin 3x$.

Решение:

по формуле $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ имеем

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}(\cos(5x - 3x) - \cos(5x + 3x)) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos 8x.$$

Пример 2

Вычислите: $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$.

Решение:

по формуле $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ = 2 \cdot 0,5 \cdot 0,98 \approx 0,98.$$

Сведения из теории:

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства $\sin x < m$, $\sin x > m$, $\cos x < m$, $\cos x > m$, $\operatorname{tg} x < m$, $\operatorname{tg} x > m$, $\operatorname{ctg} x < m$, $\operatorname{ctg} x > m$, где m – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 3

Решить неравенство: 1) $\sin x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x > -\frac{1}{2}$.

Решение:

1) решение иллюстрируется рисунком 1 слева: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{\pi}{6}$,

M_2 – угол $\frac{5\pi}{6}$, M_3 – угол $\frac{\pi}{6} + \pi$, M_4 – угол $\frac{5\pi}{6} + \pi$.

Неравенство выполняется для $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \pi < x < \frac{5\pi}{6} + \pi$. Общим решением служит неравенство:

$$\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2) Данное неравенство иллюстрируется рисунком 1 справа: здесь точке M_1 соответствует угол $\frac{2\pi}{3}$, M_2 – угол $-\frac{2\pi}{3}$. Общим решением неравенства является

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

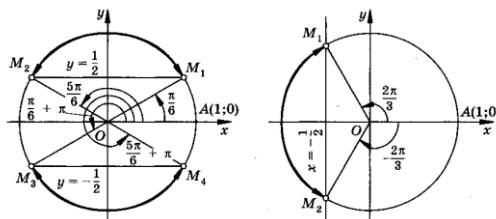


Рисунок 1. Решение тригонометрического неравенства.

Задания для самостоятельного решения:

Решить неравенство:

1 вариант 1) $\sin(2x) < 1$; 2) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > -1$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \leq -\sqrt{3}$.	2 вариант 1) $2\sin 2x > -1$; 2) $\cos\left(\frac{x}{2}\right) < -\frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \geq \sqrt{3}$.	3 вариант 1) $2\sin x < -\sqrt{2}$; 2) $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $3\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\sqrt{3}$.
--	---	---

4 вариант 1) $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) > \sqrt{3}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{ctg}(2x + 45^\circ) \leq -1$.	5 вариант 1) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos 3x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} 2x > -\sqrt{3}$.	6 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > 0$; 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$; 3) $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$.
7 вариант 1) $\sin 2x > \frac{1}{2}$; 2) $2\cos x < \sqrt{2}$; 3) $\operatorname{tg}(3x) \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$.	8 вариант 1) $\sin x \leq \frac{3}{5}$; 2) $\cos(1-x) > \frac{1}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < 3$.	9 вариант 1) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{4} < \frac{4}{5}$; 3) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{10}\right) \geq 0$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?
Проиллюстрируйте решение неравенства $\sin x > m$ на окружности

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант 1) Упростите: $\frac{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha + \cos^2\alpha}$. 2) Вычислите: $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$. 3) Вычислите: $\sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$.	2 вариант 1) Упростите: $\frac{1 - \sin\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin(\pi - 3\alpha) - \sin(-\alpha)}$. 2) Вычислите: $\sin 75^\circ + \sin 105^\circ$. 3) Вычислите: $\sin 37^\circ 30' \cdot \sin 7^\circ 30'$.	3 вариант 1) Упростите: $\frac{\cos(2\pi - 2\alpha)}{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1} - \sin^2\alpha$. 2) Вычислите: $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$. 3) Вычислите: $8\cos 7\alpha \cdot \cos 3\alpha$.
4 вариант 1) Упростите: $\frac{2\sin^2\alpha}{1 + \cos(\pi - 2\alpha)} - \sin^2\alpha$. 2) Вычислите: $\cos\frac{5\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}$. 3) Вычислите: $\cos 75^\circ \cdot \cos 105^\circ$.	5 вариант 1) Упростите: $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{\cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. 2) Вычислите: $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{7\pi}{12}$. 3) Вычислите: $2\sin(x+\alpha) \cdot \cos(x-\alpha)$.	6 вариант 1) Упростите: $\frac{2\cos^2\alpha}{1 - \sin(1,5\pi + 2\alpha)} - \cos^2\alpha$. 2) Вычислите: $\sin\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$. 3) Вычислите: $12\sin(-9\alpha) \cdot \sin 4\alpha$.
7 вариант 1) Упростите: $\frac{\sin\alpha - 0,5\sin(\pi + 2\alpha)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$. 2) Вычислите: $\operatorname{tg} 22^\circ 30' - \operatorname{tg} 67^\circ 30'$. 3) Вычислите: $4\sin 16\alpha \cdot \sin 4\alpha$.	8 вариант 1) Упростите: $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} - \cos^2\alpha$. 2) Вычислите: $\operatorname{tg} 13^\circ 30' + \operatorname{tg} 76^\circ 30'$. 3) Вычислите: $4\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$.	9 вариант 1) Упростите: $\frac{2\cos\alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha - \sin\alpha + \cos^2\alpha}$. 2) Вычислите: $\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$. 3) Вычислите: $4\cos 15^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ$.

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные тригонометрические тождества.
2. Перечислите формулы двойного угла тригонометрических функций.
3. Какие есть формулы для преобразования суммы тригонометрических функций?
4. Что называется простейшими тригонометрическими неравенствами?

Проиллюстрируйте решение неравенства $\sin x > t$ на окружности

Практическое занятие № 42

Построение графиков элементарных функций

Цель работы:

студент должен:

знать:

- элементарные функции, что является их графиками;

уметь:

- строить графики элементарных функций.

Сведения из теории:

Числовая функция

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y , зависящее от x .

Функции обычно обозначают латинскими буквами. Рассмотрим произвольную функцию f . Независимую переменную x называют аргументом функции. Число y , соответствующее числу x , называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$. Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f , называют областью значений функции и обозначают $E(f)$.

Графиком функции f называют множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегают» всю область определения функции f .

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. Графиком линейной функций является прямая. Чтобы построить прямую достаточно две точки.

Пример 1

Построить график функции $y=2x+1$.

Решение:

найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать нуль. Если $x=0$, то $y=2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Берем еще какую-нибудь точку, например, 1. Если $x=1$, то $y=2 \cdot 1 + 1 = 3$.

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

x	0	1
y	1	3

Две точки найдены, выполним чертеж:

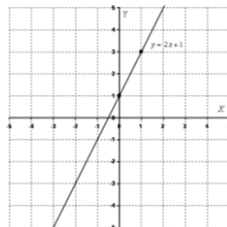


Рисунок 2. График функции $y=2x+1$

При оформлении чертежа всегда подписываем графики.

Частные случаи линейной функции

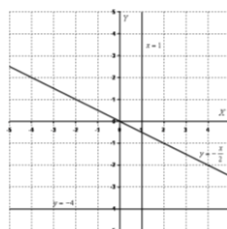


Рисунок 3. Частные случаи графика линейной функции

1) Линейная функция вида $y=ax$ ($a \neq 0$) называется прямой пропорциональностью. Например, $y = -\frac{x}{2}$. График прямой пропорциональности всегда проходит через начало координат. Таким образом, построение прямой упрощается – достаточно найти всего одну точку.

2) Уравнение вида $y=b$ задает прямую, параллельную оси Ox , в частности, сама ось Ox задается уравнением $y=0$.

3) Уравнение вида $x=b$ задает прямую, параллельную оси Oy , в частности, сама ось Oy задается уравнением $x=0$.

График квадратичной, кубической функции

Парабола. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим канонический случай: $y=x^2$. Область определения – любое действительное число. Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси Oy .

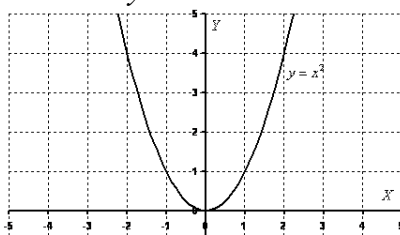


Рисунок 4. График функции $y=x^2$

Пример 2

Построить график функции $y=-x^2+2x$.

Решение:

сначала находим вершину параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -\frac{2}{-2} = 1$. Рассчитываем соответствующее значение «игрек»: $y = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$. Таким образом, вершина находится в точке (1; 1).

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Выполним чертеж:

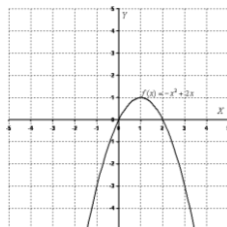


Рисунок 5. График функции $y=-x^2+2x$

Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее: Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая параболы

Кубическая парабола задается функцией $y=x^3$. Область определения, область значений – любое действительное число. Функция является нечётной. График строим по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

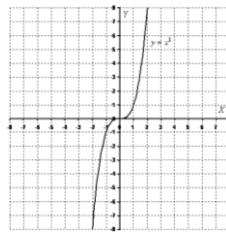


Рисунок 6. График функции $y=x^3$

График функции $y = \sqrt{x}$.

Область определения: $D(y): [0; +\infty)$. Область значений: $E(y): [0; +\infty)$. То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти. При построении подбираем такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Строим график:

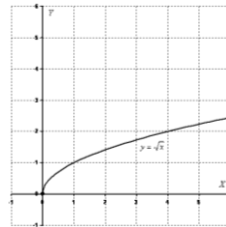


Рисунок 7. График функции $y = \sqrt{x}$

Гипербола

Общий вид $y = \frac{1}{x}$. Область определения: $D(y): (-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Область значений: $E(y): (-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Функция является нечётной, гипербола симметрична относительно начала координат.

Выполним чертёж:

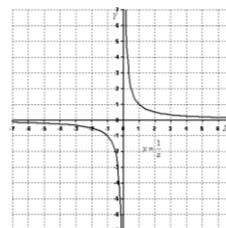


Рисунок 8. График функции $y = \frac{1}{x}$

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Пример 3

Построить правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$.

Решение:

значения x выгодно подбирать так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертеж:

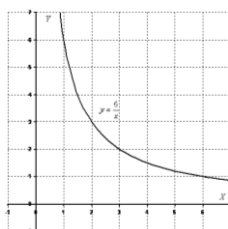


Рисунок 9. График функции $y = \frac{6}{x}$

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:

1 вариант 1) $y = x^2 + 2x + 3$; 2) $y = 2\sqrt{x}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$.	2 вариант 1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = \sqrt{2x}$; 3) $y = \frac{4}{x}$.	3 вариант 1) $y = -x^2 + 2x - 1$; 2) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{3}{2x}$.
4 вариант 1) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x$; 2) $y = -\sqrt{3x}$; 3) $y = -\frac{2}{3x}$.	5 вариант 1) $y = -2x^2 + 3x$; 2) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$; 3) $y = \frac{9}{x}$.	6 вариант 1) $y = x^2 + \frac{1}{2}x + 3$; 2) $y = 3\sqrt{x}$; 3) $y = -\frac{6}{5x}$.
7 вариант 1) $y = x^2 - 6x$; 2) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$; 3) $y = \frac{2}{x}$.	8 вариант 1) $y = -x^2 + 8x + 1$; 2) $y = -\frac{1}{3}\sqrt{x}$; 3) $y = -\frac{3}{x}$.	9 вариант 1) $y = -2x^2 + x - 3$; 2) $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$; 3) $y = -\frac{5}{x}$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется функцией?
2. Что является графиком линейной, квадратичной функций?

Практическое занятие № 41

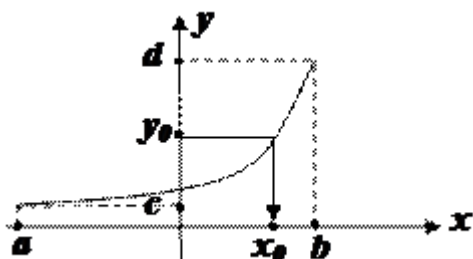
Обратная функция

Цель работы:

студент должен:

- знать: для какой функции существует обратная
- уметь строить графики прямой и обратной функций

Сведения из теории



Рассмотрим функцию $y=f(x)$, областью определения которой служит $[a;b]$, а областью изменения $[c;d]$. Функция y ставит в соответствие каждой точке из $[a;b]$ некоторую точку из $[c;d]$. Для изображенной функции можно установить и обратное соответствие: каждому значению y_0 из $[c;d]$ соответствует единственное значение x_0 из $[a;b]$, такое что $y_0=f(x_0)$. Тем самым x можно рассматривать как функцию от y с областью определения $[c;d]$, областью изменения $[a;b]$. Функцию $x=g(y)$ назовем обратно по отношению к функции $y=f(x)$.

З.В. Найти функцию, обратную к функции $y=4\sqrt[3]{x}-1$.

Решение: 1) выразим из данной формулы x через y :

$$4\sqrt[3]{x} = 1 + y; \quad \sqrt[3]{x} = \frac{1+y}{4}; \quad x = \left(\frac{1+y}{4}\right)^3 = \frac{(1+y)^3}{64}$$

2) Поменяем местами x и y :
$$y = \frac{(1+x)^3}{64}$$

Подобрать и построить графики прямой и обратной функций.

Практическое занятие № 8

Промежутки возрастания, убывания, наибольшее, наименьшее значения функции. Точки экстремума

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определения возрастающей (убывающей) функции;
- определения точки максимума (минимума) функции;

уметь:

- находить промежутки монотонности функции;
- вычислять точки экстремума функции.

Сведения из теории:

Возрастание и убывание функций

Функция f возрастает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция f убывает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из множества P , таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Иными словами, функция f называется возрастающей на множестве P , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Функция f называется убывающей на множестве P , если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции.

Пример 1

Докажите, что функция $f(x)=1/x$ является убывающей.

Решение:

область определения функции: $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Рассмотрим поведение функции на каждом интервале:

$(-\infty; 0)$: $x_1 = -8$, $x_2 = -4$, т.е. $x_2 > x_1$, тогда $f(-8) = -0,125$, $f(-4) = -0,25$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$, а значит функция $f(x) = 1/x$ является убывающей на интервале $(-\infty; 0)$.

$(0; +\infty)$: $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, т.е. $x_2 > x_1$, тогда $f(4) = 0,25$, $f(8) = 0,125$, т.е. $f(x_2) < f(x_1)$, а значит функция $f(x) = 1/x$ является убывающей на интервале $(0; +\infty)$.

Однако эта функция не является убывающей на объединении этих промежутков. Например, $1 > -1$, но $f(1) < f(-1)$.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины, включая концы (если, конечно, они входят в эти промежутки). Так, можно было сказать, что функция $f(x) = 1/x$ является убывающей на отрезке $[2; 500]$. Это верно, но такой ответ неполон.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки удобно пользоваться понятием окрестности.

Окрестностью точки a называется любой интервал, содержащий эту точку. Например, интервал $(2; 6)$ – одна из окрестностей точки 3, интервал $(-3,3; -2,7)$ – окрестность точки -3.

Экстремумы

Точка x_0 называется *точкой минимума* функции f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f , если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

По определениям значение функции f в точке максимума x_0 является наибольшим среди значений функции из некоторой окрестности этой точки, поэтому график функции в окрестности x_0 , как правило, имеет вид гладкого «холма» или заостренного «пика». В окрестности точки минимума графики, как правило, изображаются в виде «впадины», тоже или гладкой или заостренной.

Для точек максимума и минимума функции принято общее название – их называют *точками экстремума*.

Значение функции в этих точках называют соответственно максимумами и минимумами функции (общее название – экстремум функции). Точки максимума обозначают $x_{\max}$, а точки минимума $x_{\min}$. Значения функции в этих точках обозначаются соответственно $y_{\max}$, $y_{\min}$.

Пример 2

Начертите эскиз графика функции f , если известно, что f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$. Какой будет точка $x=2$?

Решение:

схематично график можно изобразить в виде:

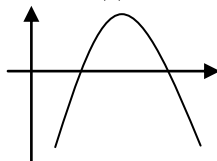


Рисунок 10. Эскиз графика

График имеет вид гладкого «холма», а значит точка $x=2$ – точка максимума.

Задания для самостоятельного решения:

Начертите эскиз графика функции f , определите вид точек, если:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
f возрастает на промежутке $(-\infty; 2]$ и убывает на промежутке $[2; +\infty)$.	f возрастает на промежутках $(-\infty; -2]$ и $[0; 3]$, убывает на промежутке $[2; 0]$.	f возрастает на промежутке $[1; 4]$ и убывает на промежутках $(-\infty; 1]$ и $[4; +\infty)$.

4 вариант f возрастает на промежутках $(-\infty; -5]$ и $[1; 5]$, убывает на промежутках $[-5; 1]$ $[5; +\infty)$.	5 вариант f возрастает на промежутке $(-\infty; 5]$ и убывает на промежутке $[5; +\infty)$.	6 вариант f возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывает на промежутке $[0; +\infty)$.
7 вариант f возрастает на промежутке $[-1; 2]$ и убывает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$.	8 вариант f возрастает на промежутках $(-\infty; -4]$ и $[2; 4]$, убывает на промежутках $[-4; 2]$ $[4; +\infty)$.	9 вариант f возрастает на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[2; 5]$, убывает на промежутках $[-3; 2]$ $[5; +\infty)$.

Контрольные вопросы:

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке?
2. Дайте определение точке максимума (минимума) функции.

Практическое занятие № 47

Степенная функция, ее график и свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства степенной функции с различными показателями степени;

уметь:

- строить график степенной функции с различными показателями степени.

Сведения из теории:

Степенная функция с натуральным показателем

Функция $y=x^n$, где n – натуральное число, называется степенной функцией с натуральным показателем. При $n=1$ получаем функцию $y=x$.

Прямая пропорциональность

Прямой пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y=kx^n$, где число k называется коэффициентом пропорциональности.

Перечислим свойства функции $y=kx$:

1. Область определения функции – множество всех действительных чисел.
2. $y=kx$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=k(-x)=-kx=-k(x)=-f(x)$.
3. При $k>0$ функция возрастает, а при $k<0$ убывает на всей числовой прямой.

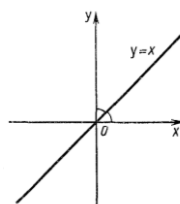


Рисунок 12. График функции $y=kx$

При $n=2$ получаем функцию $y=x^2$. Перечислим свойства функции $y=x^2$:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^2$ – четная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.
3. На промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает. На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает.
4. Графиком функции $y=x^2$ является парабола.

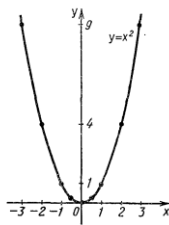


Рисунок 13. График функции $y=x^2$

При $n = 3$ получаем функцию $y=x^3$, ее свойства:

1. Область определения функции – вся числовая прямая.
2. $y=x^3$ – нечетная функция, т.к. $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.
3. Функция $y=x^3$ возрастает на всей числовой прямой.
4. График функции $y=x^3$ называется кубической параболой.

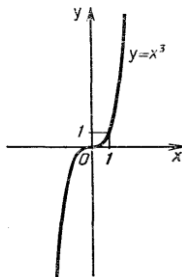


Рисунок 14. График функции $y=x^3$

Пусть n – произвольное четное натуральное число, большее двух: $n=4, 6, 8, \dots$

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$. График такой функции напоминает параболу $y=x^2$, только ветви графика при $|n|>1$ круче идут вверх, чем больше n , а при $|n|<1$ «теснее прижимаются» к оси x , чем больше n .

Пусть n – произвольное нечетное число, большее трех: $n=5, 7, 9, \dots$

В этом случае функция $y=x^n$ обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^3$. График такой функции напоминает кубическую параболу (только ветви графика тем круче идут вверх, вниз, чем больше n). Отметим также, что на промежутке $(0; 1)$ график степенной функции $y=x^n$ тем медленнее отдалается от оси Ox с ростом x , чем больше n .

Степенная функция с целым отрицательным показателем.

Рассмотрим функцию $y=x^{-n}$, где n – натуральное число. При $n=2$ получаем $y=x^{-2}$ или $y=\frac{1}{x^2}$. Свойства этой функции:

1. Функция определена при всех $x \neq 0$.
2. $y=\frac{1}{x^2}$ – четная функция.
3. $y=\frac{1}{x^2}$ – убывает на $(0; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; 0)$.

Теми же свойствами обладают любые функции вида $y=x^{-n}$ при четном n , большем двух.

Функции вида $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[n]{x}$ обладают теми же свойствами, как и функция $y = x^n$.

Степенная функция с положительным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y=x^r$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим некоторые свойства этой функции:

1. Область определения – луч $[0; +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.

3. Функция $y = x^r$ возрастает на $[0; +\infty)$.

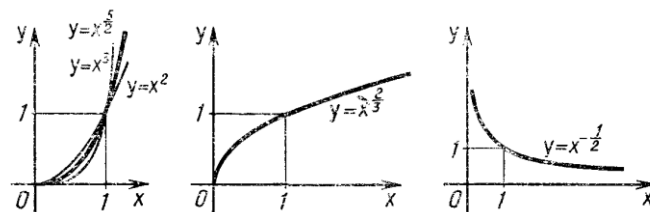


Рисунок 15. Графики степенных функций

На рисунке слева изображен график функции $y = x^{\frac{5}{2}}$. Он заключен между графиками функций $y=x^2$ и $y=x^3$, заданных на промежутке $[0; +\infty)$.

Подобный вид имеет график любой функции вида $y=x^r$, где $r > 1$.

На том же рисунке посередине изображен график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$. Подобный вид имеет график любой степенной функции $y=x^r$, где $0 < r < 1$.

Степенная функция с отрицательным дробным показателем

Рассмотрим функцию $y=x^{-r}$, где r – положительная несократимая дробь. Перечислим свойства этой функции:

1. Область определения – промежуток $(0; +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Функция $y=x^{-r}$ убывает на $(0; +\infty)$.

Пример 1

Построить график функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

Решение:

построим таблицу значений данной функции:

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Нанесем полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной кривой:

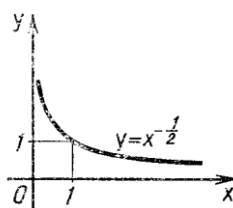


Рисунок 16. График функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$

Подобный вид имеет график любой функции $y=x^{-r}$, где r – отрицательная дробь.

Задания для самостоятельного решения:

Постройте график функции и опишите ее свойства:

1 вариант $y = 2\sqrt{x+1}$.	2 вариант $y = 2 - \sqrt[4]{x}$.	3 вариант $y = 1 + \sqrt[3]{x}$.
---	---	---

4 вариант $y = 3x^{-2}$.	5 вариант $y = \sqrt{x} - 4$.	6 вариант $y = 1 - \sqrt[3]{x}$.
7 вариант $y = \sqrt{x} + 3$.	8 вариант $y = \sqrt[5]{x^4} + 1$.	9 вариант $y = \sqrt{x-2} + 1$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется степенной функцией?
2. Перечислите виды степенных функций.
3. Перечислите свойства функции для различных показателей степени.

Практическое занятие № 9

Цель работы:

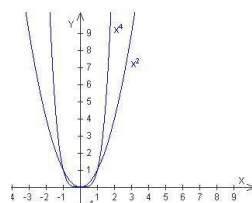
студент должен:

знать: определение степенной функции, свойства, графики

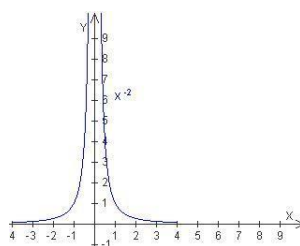
уметь: строить графики

Сведения из теории Степенная функция

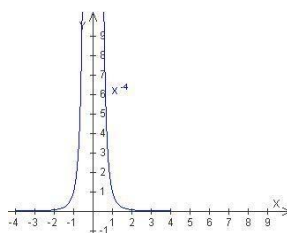
Функция $y = x^n$ называется степенной. Показатель степени n принадлежит множеству действительных чисел. График степенной функции при том, что n натуральное и n больше или равно двум называется параболой n -й степени. Если n четное, то функция $y = x^n$ является четной, её график симметричен относительно оси ординат. Чем больше четное n , тем круче поднимаются вверх ветви параболы:



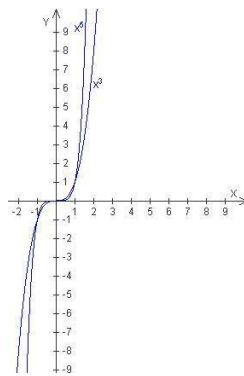
Степенная функция с целым отрицательным показателем $y = x^{-n}$, где n четное и больше или равно двум, является четной, её график симметричен относительно оси ординат. Пример для $y = x^{-2}$



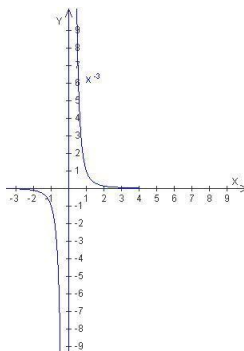
Другой пример для $y = x^{-4}$:



Если n нечетное и n больше или равно трем, то функция $y = x^n$ является нечетной, её график симметричен относительно начала координат. Чем больше нечетное n , тем круче поднимаются вверх ветви параболы:



Степенная функция с целым отрицательным показателем $y = x^{-n}$, где n нечетное и больше или равно трем, является нечетной, её график симметричен относительно начала координат. Пример для $y = x^{-3}$:



Самостоятельная работа: Построить четыре степенных функции с разными показателями

Практическое занятие № 40

Параллельный перенос, симметрия относительно осей ординат

Цель работы:

студент должен:

знать:

- графики элементарных функций;
- формулы преобразования графиков;

уметь:

- выполнять построение графиков функций с помощью параллельного переноса, симметрии относительно осей ординат.

Сведения из теории:

Параллельный перенос на вектор $(0; b)$ вдоль оси ординат.

Обозначая через $(x'; y')$ координаты точки, в которую переходит произвольная точка $(x; y)$ плоскости при данном преобразовании, получим формулы:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + b \end{cases}$$

Для построения графика функции $f(x)+b$, где b – постоянное число, надо «перенести» график функции $f(x)$ на вектор $(0; b)$ вдоль оси Oy вверх если $b>0$, вниз – если $b<0$.

Пример 1

Построить графики функций: а) $y=\sin x+2$; б) $y=x^2-5$.

Решение:

а) в соответствии с правилом график функции $y=\sin x+2$ получается из $y=\sin x$ параллельным переносом вдоль оси Oy вверх на две единицы;

б) график функции $y=x^2-5$ получается из $y=x^2$ параллельным переносом вдоль оси Оу вниз на пять единиц.

Параллельный перенос вдоль оси абсцисс на вектор $(a; 0)$ задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y \end{cases}.$$

График функции $y=f(x-a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ переносом вдоль оси абсцисс на a единиц вправо, если $a>0$, влево – если $a<0$.

Пример 2.

Построить графики функций: а) $y=\cos(x-\pi/4)$; б) $y=\sqrt{x+1}$.

Решение:

а) в соответствии с правилом график функции $y=\cos(x-\pi/4)$ получается из $y=\cos(x)$ параллельным переносом вдоль оси Ох вправо на $\pi/4$;

б) график функции $y=\sqrt{x+1}$ получается из $y=\sqrt{x}$ параллельным переносом вдоль оси Ох влево на одну единицу.

При осевой симметрии относительно оси Ох точка $(x; y)$ переходит в точку $(x; -y)$.

При осевой симметрии относительно оси Оу точка $(x; y)$ переходит в точку $(-x; y)$.

При центральной симметрии относительно начала координат $(x; y)$ переходит в точку $(-x; -y)$.

Задания для самостоятельного решения:

№1. Дана точка $A(4; 6)$. Построить точку B , симметричную точке A относительно оси абсцисс, и найти координаты этой точки. Показать, что если точки A и B симметричны относительно оси абсцисс, то их абсциссы равны, а ординаты отличаются только знаками.

№2. Построить точку $A(-3; 5)$ и точку B , симметричную точке A относительно оси ординат. Показать, что если точки A и B симметричны относительно оси ординат, то их ординаты равны, а абсциссы отличаются только знаками.

№3. Построить в одной системе координат графики функций (записать цепочку движения):

1 вариант $y=\sin x$, $y=\sin(x-\pi/6)$, $y=\sin x+2$.	2 вариант $y=\cos x$, $y=\cos x-2$, $y=\cos(x+\pi/3)$.	3 вариант $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{tg}(x-\pi/2)$, $y=\operatorname{tg} x+3$.
4 вариант $y=x^2$, $y=x^2+4$, $y=(x-3)^2$.	5 вариант $y=x^2$, $y=(x+1)^2$, $y=x^2-2$.	6 вариант $y=x^3$, $y=x^3+1$, $y=(x-2)^3$.
7 вариант $y= x $, $y= x-2 $, $y= x +6$.	8 вариант $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[3]{x}-4$, $y=\sqrt[3]{x+1}$.	9 вариант $y= x $, $y= x+1 $, $y= x -2$.

Контрольные вопросы:

1. Какими формулами задается параллельный перенос?
2. Как построить точку симметричную относительно осей координат?

Практическое занятие № 10

Арифметические операции над функциями

Цель работы:

студент должен:

знать:

- графики элементарных функций;

уметь:

- строить график функции как композицию двух функций.

Сведения из теории:

Построение графика суммы (произведения) двух функций производится сложением (умножением) ординат точек графиков с одинаковыми абсциссами.

Пример 1

Пусть даны графики функций $y=x$ и $y=\sin x$. Построить $y=x+\sin x$ и $y=x\sin x$, являющихся соответственно суммой и произведением заданных графиков.

Решение:

графики функций $y=x+\sin x$ и $y=x\sin x$:

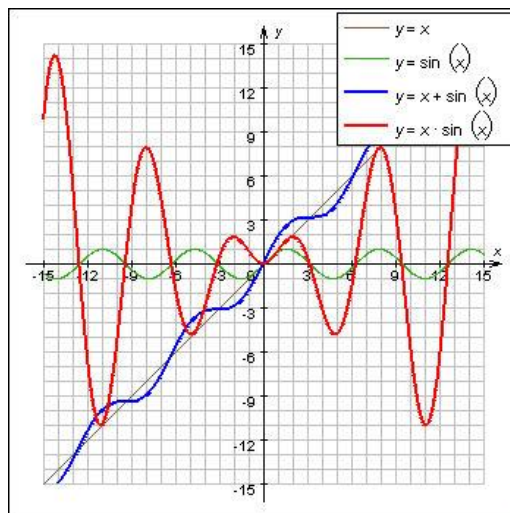


Рисунок 11. Графики функций $y=x$, $y=\sin x$, $y=x+\sin x$, $y=x\sin x$

Пусть известен график $y=f(x)$ и нужно построить график функции $y=|f(x)|$. По определению, $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$.

Значит, часть графика, лежащую в верхней координатной полуплоскости, изменять не надо, а часть графика, лежащую в нижней координатной полуплоскости, нужно отобразить симметрично относительно оси Ox .

Пусть известен график $y=f(x)$ и нужно построить график функции $y=f(|x|)$. Заметим, что при $x \geq 0$ $f(|x|)=f(x)$, а функция $y=f(|x|)$ четная. Поэтому, чтобы построить график функции $y=f(|x|)$, нужно часть графика функции $y=f(x)$, лежащую в левой координатной полуплоскости, отбросить, а часть графика, лежащую в правой координатной полуплоскости, отобразить симметрично относительно оси Oy .

Задания для самостоятельного решения:

Построить графики функций:

1 вариант 1) $y=x+\cos x$; 2) $y= x^2+2x+3 $.	2 вариант 1) $y=x\cos x$; 2) $y= x^2-4x $.	3 вариант 1) $y=x+\operatorname{tg} x$; 2) $y= x^2-6x $.
4 вариант 1) $y=x \operatorname{tg} x$; 2) $y = \frac{4}{ x }$.	5 вариант 1) $y=x+\operatorname{ctg} x$; 2) $y = \frac{3}{2 x }$.	6 вариант 1) $y=x \operatorname{ctg} x$; 2) $y = -\frac{6}{5 x }$.
7 вариант 1) $y=-x+\sin x$; 2) $ y = -\frac{1}{x}$.	8 вариант 1) $y=-x \sin x$; 2) $ y = \frac{3}{5x}$.	9 вариант 1) $y=-x+\cos x$; 2) $ y = -\frac{1}{2x}$.

Контрольные вопросы:

1. Как построить сумму (произведение) двух функций?
2. Как построить модуль функции, модуль аргумента?

Практическое занятие № 39**Параллельный перенос, растяжение, сжатие****Цель работы:**

студент должен:

знать:

- графики элементарных функций;
- формулы преобразования графиков;

уметь:

- выполнять построение графиков функций с помощью параллельного переноса, растяжения, сжатия.

Сведения из теории:

Растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом k, которое задается формулами:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}.$$

Для построения графика функции $y=kf(x)$ надо «растянуть» график функции $y=f(x)$ в k раз вдоль оси ординат ($|k|>1$).

Если $0<|k|<1$, то растяжение с коэффициентом k называют сжатием.

Пример 1

Построить графики функций: а) $y=\frac{1}{3}\cos x$; б) $y=-2x^2$.

Решение:

а) в соответствии с правилом график функции $y=\frac{1}{3}\cos x$ получается из $y=\cos x$ сжатием вдоль оси ординат с коэффициентом 3;

б) график функции $y=-2x^2$ получается из $y=x^2$ растяжением вдоль оси ординат с коэффициентом 2.

Растяжение вдоль оси Ox с коэффициентом k, которое задается формулами:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}.$$

Для построения графика функции $y=f(x/k)$ надо подвергнуть график функции $y=f(x)$ растяжению с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.

Пример 2

Построить графики функций: а) $y=\sin(x/3)$; б) $y=\cos(2x)$.

Решение:

а) в соответствии с правилом график функции $y=\sin(x/3)$ получается из $y=\sin x$ растяжением вдоль оси Ox с коэффициентом 3;

б) график функции $y=\cos(2x)$ получается из $y=\cos x$ сжатием вдоль оси Ox с коэффициентом 2.

Задания для самостоятельного решения:

Построить в одной системе координат графики функций (записать цепочку движения):

1 вариант	2 вариант	3 вариант
$y = \frac{1}{x}$,	$y = \cos x$, $y = 2\cos x - 3$,	$y = -x^2$,

$y = \frac{2}{x} + 2,$ $y = \frac{1}{2x-3}.$	$y = \frac{1}{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}).$	$y = 4 - \frac{x^2}{3},$ $y = -(2x-2)^2.$
4 вариант $y = \sin x,$ $y = \frac{1}{3} \sin x + 2,$ $y = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3}).$	5 вариант $y = -\frac{1}{x},$ $y = 2 - \frac{3}{x},$ $y = -\frac{3}{2x+4}.$	6 вариант $y = \sin x,$ $y = \sin 3x - 1,$ $y = \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{3}).$
7 вариант $y = x^3,$ $y = \frac{x^3}{2} + 2,$ $y = -(x-1)^3.$	8 вариант $y = \sqrt{x},$ $y = 4 - \sqrt{2x},$ $y = 1 + \frac{1}{2} \sqrt{x}.$	9 вариант $y = \cos x,$ $y = 1 + \cos 2x,$ $y = 1 - \frac{1}{3} \cos x.$

Контрольные вопросы:

1. Какими формулами задается растяжение (сжатие)?

Практическое занятие № 11

Построение графиков

Косинус, его график и свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства функций;
- схему исследования функции;

уметь:

- строить графики функций.

Сведения из теории:

Четные и нечетные функции

Рассмотрим функции области определения которых симметричны относительно начала координат, т.е. для любого x из области определения функции число $(-x)$ также принадлежит области определения. Среди таких функций выделяют четные и нечетные.

Функция f называется четной, если для любого x из области определения $f(-x)=f(x)$.

Функция f называется нечетной, если для любого x из области определения $f(-x)=-f(x)$.

Пример 1

Определите какая из функций является четной (нечетной): $y=x^4$, $y=x^3$.

Решение:

функция $y=x^4$ четная, т.к. $x^4=(-x)^4$, т.е. $y(-x)=y(x)$, а функция $y=x^3$ является нечетной, т.к. $x^3=(-x)^3=-x^3$, т.е. $y(-x)=-y(x)$.

Пример 2

Докажите, что функция $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ четная.

Решение:

вычислим $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{-x^3 + x} = \frac{-(x^3 + x)}{-(x^3 - x)} = -\frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x),$$

т.е. $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$ – четная по определению.

Свойства графиков:

1. График четной функции симметричен относительно оси ординат.
2. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Из этих двух правил вытекает следующее: при построении графика четной или нечетной функции достаточно построить его часть для неотрицательных x , а затем отразить полученный график относительно оси ординат (в случае четной функции) или начала координат (в случае нечетной).

Ранее мы строили графики функций «по точкам». Во многих случаях этот метод дает хорошие результаты, если, конечно, отметить достаточно большое число точек. Однако при этом приходится составлять большие таблицы значений функции, а главное, можно не заметить существенных особенностей функции и в итоге ошибиться при построении графика.

Для того чтобы избежать ошибок, надо научиться выявлять характерные особенности функции, т.е. предварительно провести ее исследование.

Схема исследования функций:

1. Найти область определения и область значений данной функции.
2. Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция четной (нечетной), периодической.
3. Вычислить координаты графика функции с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Выяснить, на каких промежутках функция убывает, а на каких возрастает.
6. Найти точки экстремума, вид экстремума (минимум или максимум) и вычислить значения функции в этих точках.
7. Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения (например, точка $x=0$ для функции $f(x)=1/x$), и при больших (по модулю) значениях аргумента.

Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер.

Задания для самостоятельного решения:

Построить график функции f , если известны ее свойства:

1.	Свойство функции	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант
	Область определения	[-6; 6]	[-5; 4]	[-4; 4]	[-5; 3]
	Область значений	[-2; 5]	[0; 6]	[-3; 6]	[0; 5]
2	Точки пересечения графика:				
	а) с осью Ox	(-4; 0), (-2; 0)	(0; 0)	(-4; 0), (-1; 0), (2,5; 0)	(3; 0)
	б) с осью Oy	(0; 2,5)	(0; 0)	(0; -2)	(0; 4,5)
3	Промежутки знакопостоянства:				
	а) $f(x) > 0$	[-6; -4), (-2; 6]	[-5; 0), (0; 4]	(-4; -1), (2,5; 4]	[-5; 3)
	б) $f(x) < 0$	(-4; -2)	-	(-1; 2,5)	-
4	Промежутки:				
	а) возрастания	[-3; 1], [4; 6]	[-5; -2], [0; 4]	[-4; -2], [1; 4]	[-3; 1]

	б) убывания	$[-6; -3],$ $[1; 4]$	$[-2; 0]$	$[-2; 1]$	$[-5; -3],$ $[1; 3]$
5.1	Точки максимума, максимум функции	$x_{\max}=1$ $y_{\max}=3$	$x_{\max}=-2$ $y_{\max}=2$	$x_{\max}=-2$ $y_{\max}=2$	$x_{\max}=1$ $y_{\max}=5$
5.2	Точки минимума, минимум функции	$x_{\min1}=-3,$ $y_{\min1}=-2;$ $x_{\min2}=4$ $y_{\min2}=1$	$x_{\min}=0$ $y_{\min}=0$	$x_{\min}=1$ $y_{\min}=-3$	$x_{\min}=-3$ $y_{\min}=2$
6	Дополнительные точки графика	$(-6; 3),$ $(6; 5)$	$(-5; 0,5),$ $(4; 6)$	$(4; 6)$	$(-5; 3)$

Контрольные вопросы:

1. Перечислите свойства функций.
2. Перечислите основные этапы исследования функции.

Сведения из теории:

Функции синус и косинус

Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x$ и $y=\cos x$, называют соответственно синусом и косинусом (и обозначают $\sin$ и $\cos$).

Область определения этих функций – множество всех действительных чисел. Областью значений функций синус и косинус является отрезок $[-1; 1]$. Т.е. $D(\sin)=D(\cos)=R$; $E(\sin)=E(\cos)=[-1; 1]$.

Свойства функций синус и косинус:

для любого x справедливы равенства:

- 1) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$;
- 2) $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$, где n – произвольное целое число.

Синусоида

Построим график функции синус на отрезке $[0; 2\pi]$. Для этого отметим на оси ординат точки $(0; -1)$ и $(0; 1)$, а на оси абсцисс точку с абсциссой 2π (длина отрезка $[0; 2\pi]$ шесть клеток $\sim 6,28$). Далее пользуясь вычисленными значениями синуса построим график функции на отрезке $[0; 2\pi]$. Вне этого отрезка заметим, что $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ и с помощью параллельных переносов вдоль оси Ox влево и вправо достроим график функции на отрезках $[-4\pi; -2\pi]$, $[-2\pi; 0]$, $[2\pi; 4\pi]$. График синуса называется синусоидой.

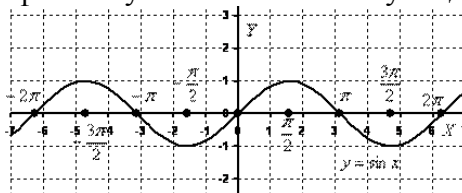


Рисунок 19. График функции $y=\sin x$

Для построения графика косинуса необходимо воспользоваться формулой $\cos x=\sin(x+\pi/2)$. Это означает, что график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние $\pi/2$ влево вдоль оси Ox . Поэтому график функции $y=\cos x$ также является синусоидой.

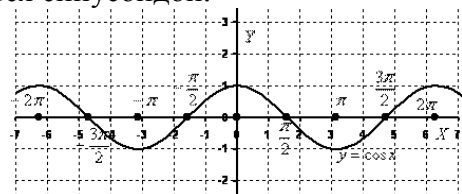


Рисунок 20. График функции $y=\cos x$

Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

	Функция
--	---------

	$y=\sin x$	$y=\cos x$
1.1 Область определения	R	R
1.2 Область значений	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Четная
2.2 Наименьший положительный период	2π	2π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox	$(\pi n; 0)$	$(\pi/2+\pi n; 0)$
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy	$(0; 0)$	$(0; 1)$
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(2\pi n; \pi+2\pi n)$	$(-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n)$
4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi+2\pi n; 2\pi n)$	$(\pi/2+2\pi n; 3\pi/2+2\pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$[-\pi/2+2\pi n; \pi/2+2\pi n]$	$[-\pi+2\pi n; 2\pi n]$
5.2 Промежутки убывания	$[\pi/2+2\pi n; 3\pi/2+2\pi n]$	$[2\pi n; \pi+2\pi n]$
6.1 Точки минимума	$-\pi/2+2\pi n$	$\pi+2\pi n$
6.2 Минимумы функции	-1	-1
6.3 Точки максимума	$\pi/2+2\pi n$	$2\pi n$
6.4 Максимумы функции	1	1

Задания для самостоятельного решения:

№1. Построить схематически косинусоиду на интервале $[-3\pi; 3\pi]$ и выполнить следующие упражнения:

1) Проиллюстрировать по графику, что:

а) функция $\cos x$ не может принимать значений, превосходящих по абсолютной величине единицу, т. е. $-1 \leq \cos x \leq 1$;

б) каждому действительному значению x соответствует только одно значение $\cos x$ (свойство однозначности косинуса);

в) при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции не изменяется, т. е. $\cos(-x) = \cos x$ (свойство четности косинуса). Как можно использовать свойство четности косинуса при построении его графика;

г) при изменении произвольного значения аргумента на число, кратное числу 2π , значение функции $\cos x$ не изменяется, т. е. $\cos(x+2\pi k) = \cos x$ (свойство периодичности косинуса). Как можно использовать периодичность косинуса при построении его графика;

д) при изменении произвольного значения аргумента на число π значение функции y заменяется противоположным ему значением $-y$, т. е. $\cos(x \pm \pi) = -\cos x$;

е) уравнение $\cos x = 0,5$ имеет бесчисленное множество решений. Назвать несколько частных решений этого уравнения.

2) Указать интервалы, в которых функция $y = \cos x$ принимает:

а) положительные значения;

б) отрицательные значения.

Какие четверти единичной окружности соответствуют этим интервалам.

3) Выделить на оси абсцисс и на единичной окружности интервалы, в которых функция $y = \cos x$:

а) возрастает;

б) убывает.

Проиллюстрировать на графике, что в любом интервале монотонности косинус последовательно принимает все свои возможные значения, каждому из которых соответствует только одно значение аргумента в рассматриваемом интервале.

№2. По графику функции $y = \cos x$ ответить на следующие вопросы:

- 1) Как изменяется $\cos x$, если аргумент x :
 - а) увеличивается от -2π до π ;
 - б) уменьшается от $2,5\pi$ до $1,5\pi$?
- 2) Чему равен косинус числа: а) π ; б) 2π ; в) $-0,5\pi$; г) -2π ?
- 3) Что меньше: а) $\cos 0,7$ или $\cos 1$; б) $\cos(\pi/2+1)$ или $\cos(\pi/2-1)$?
- 4) При каких значениях x функция $\cos x$ равна: а) 0; б) 1; в) -1?
- 5) Проиллюстрировать на графике, что не существует значений аргумента x , при которых функция $\cos x$ была равна 2.

Контрольные вопросы:

1. Какие функции называют синусом и косинусом?
 2. Что является графиком функций синус и косинус?
- Перечислите свойства функций синус и косинус

Практическое занятие № 38

Преобразования графиков

Цель работы:

студент должен:

знать какие существуют преобразования графиков
уметь строить

Вариант 1.

Постройте график функции $y = \sin x - 1$;

Постройте график функции $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$;

Постройте график функции $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2$;

Вариант 2.

Постройте график функции $y = \sin x + 0,5$;

Постройте график функции $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$;

Постройте график функции $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 1,5$;

Практическое занятие № 12

Построение графиков функций

Логарифмическая функция, ее график и свойства

Котангенс, его график и свойства

Цель работы:

студент должен:

знать:

- основные свойства функций

уметь:

- строить график логарифмической функции с разными основаниями.

- строить графики тригонометрических функций.

Сведения из теории:

Пусть a – положительное число, $a \neq 1$.

Функцию, заданную формулой $y = \log_a x$ называют *логарифмической функцией с основанием a* .

Перечислим основные свойства логарифмической функции:

1. Область определения – множество всех положительных чисел $\mathbf{R}_+$, т.е. $D(\log_a) = (0; +\infty)$.

2. Область значений – множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, т.е. $E(\log_a) = (-\infty; +\infty)$.

3. Логарифмическая функция на всей области определения возрастает при $a > 1$ или убывает при $0 < a < 1$.

Для построения графика заметим, что значение 0 логарифмическая функция принимает в точке 1; $\log_a 1 = 0$ при любом $a > 1$, т.к. $a^0 = 1$.

Вследствие возрастания функции при $a > 1$ получаем, что при $x > 1$ логарифмическая функция принимает положительные значения, а при $0 < x < 1$ – отрицательные.

Если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция убывает на $\mathbf{R}_+$, поэтому функция принимает положительные значения при $0 < x < 1$, а при $x > 1$ – отрицательные.

Опираясь на все вышесказанное строим графики логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

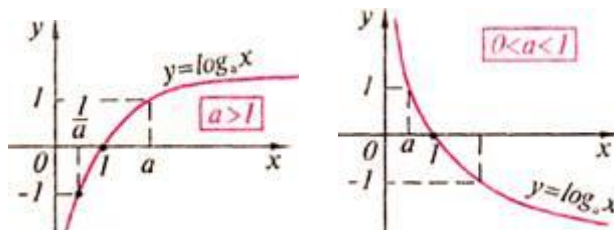


Рисунок 17. График логарифмической функции

Справедливо следующее утверждение: графики показательной и логарифмической функций, имеющих одинаковое основание, симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример 1

Решить графически уравнение $\log_2 x = -x + 1$.

Решение:

построим графики функций $y = \log_2 x$ и $y = -x + 1$ в одной координатной плоскости:

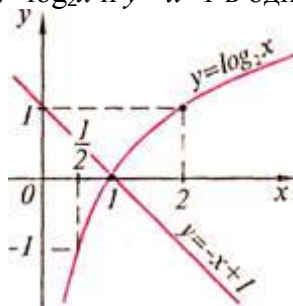


Рисунок 18. Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = -x + 1$

Графики этих функций пересекаются в точке с абсциссой $x = 1$.

Проверка показывает, что $x = 1$ – корень данного уравнения.

Задания для самостоятельного решения:

Решите графически уравнение:

1 вариант $\log_4(x+3) = x - 1$.	2 вариант $\lg(1-x) = x^2 - 1$.	3 вариант $\frac{1}{2} \log_2(x+1) = x$.
---	--	---

4 вариант $1 + \log_2(x + 2) = 2 - x.$	5 вариант $\log_{\frac{1}{2}} x = x - 3.$	6 вариант $\log_2 x = 2^{5-x}.$
7 вариант $\left \log_{\frac{1}{2}} x \right = 1 - x.$	8 вариант $\log_{\frac{1}{3}} x = 2x - 7.$	9 вариант $\lg(1 - x) = 5 - x.$

Контрольные вопросы:

1. Что называется логарифмической функцией?
2. Перечислите свойства логарифмической функции.

Сведения из теории:

Числовые функции, заданные формулами $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, называют соответственно тангенсом и котангенсом (и обозначают tg и ctg).

Областью определения функции тангенс является множество всех чисел x , для которых $\cos x \neq 0$, т.е. все числа $x \neq \pi/2 + \pi n$, где n – произвольное целое число. Областью определения функции котангенс является множество всех чисел x , для которых $\sin x \neq 0$, т.е. все числа $x \neq \pi n$, где n – произвольное целое число.

Область значений тангенса (котангенса) – вся числовая прямая.

Свойства функций тангенс и котангенс:

для любого x справедливы равенства:

- 1) $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$;
- 2) $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$, где n – произвольное целое число.

Построение графика тангенса на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ аналогично построению синуса. Вследствие тождества $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ график тангенса на всей области определения получается из графика на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ параллельным переносом вдоль оси Ox влево и вправо на π , 2π и т.д. График функции тангенс называют тангенсоидой.

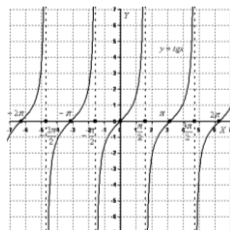


Рисунок 21. График функции $y = \operatorname{tg} x$

Для построения графика $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся тождеством $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$. Из этого тождества следует, что для построения графика котангенса необходимо сдвинуть график тангенса на $\pi/2$ влево вдоль оси Ox и отразить полученную кривую относительно оси Ox .

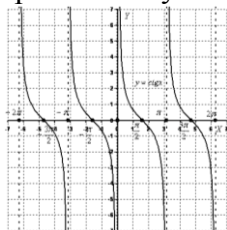


Рисунок 22. График функции $y = \operatorname{ctg} x$

Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

	Функция	
	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1.1 Область определения	$(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$	$(\pi n; \pi + \pi n)$
1.2 Область значений	R	R
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Нечетная
2.2 Наименьший положительный период	π	π
3.1 Координаты точек пересечения графика	$(\pi n; 0)$	$(\pi/2 + \pi n; 0)$

с осью Ох		
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Оу	(0; 0)	Нет
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(\pi n; \pi/2 + \pi n)$	$(\pi n; \pi/2 + \pi n)$
4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi/2 + \pi n; \pi n)$	$(-\pi/2 + \pi n; \pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$	Нет
5.2 Промежутки убывания	Нет	$(\pi n; \pi + \pi n)$
6.1 Точки минимума	Нет	Нет
6.2 Точки максимума	Нет	Нет

Задания для самостоятельного решения:

№1. Построить схематически тангенсоиду на интервале $(-3\pi/2; 3\pi/2)$. При построении:

- 1) отметить на оси абсцисс точки, соответствующие числам: $-1,5\pi; -\pi; -0,5\pi; 0,5\pi; \pi; 1,5\pi$ (за единицу масштаба принять отрезок, равный 1 см);
- 2) через точки $(-1,5\pi; 0); (-0,5\pi; 0); (0,5\pi; 0)$ и $(1,5\pi; 0)$ провести (пунктиром) прямые, параллельные оси ординат;
- 3) отметить точки тангенсоиды с ординатами ± 1 ;
- 4) вычертить (от руки) тангенсоиду.

№2. Пользуясь схематическим графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ выполнить следующие упражнения:

1) Указать интервалы, в которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

2) Определить, при каких значениях x на интервале $(-3\pi/2; 3\pi/2)$ функция $y = \operatorname{tg} x$: а) убывает; б) возрастает; в) принимает значение, равное нулю; г) теряет смысл.

Выразить формулой множество таких значений x , при которых $y = \operatorname{tg} x$ теряет смысл.

3) Убедиться, что каждому допустимому значению аргумента x соответствует только одно значение функции.

4) Проиллюстрировать на графике, что функция $y = \operatorname{tg} x$ есть периодическая функция с периодом π , т. е. $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$.

5) Показать, что каждому значению функции y соответствует бесчисленное множество определенных значений аргумента x .

6) Решить неравенства: а) $\operatorname{tg} x > -1$; б) $|\operatorname{tg} x| < 1$.

№3. Построить на одном чертеже графики функций: $y = x$; $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, если $0 < x < \pi/2$. Пользуясь чертежом, проиллюстрировать неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Контрольные вопросы:

1. Какие функции называют тангенсом и котангенсом?
2. Что является графиком функций тангенс и котангенс?
3. Перечислите свойства функций тангенс и котангенс.

Практическое занятие № 13

Правила вычисления производных

Цель работы:

студент должен:

знать:

- систему и определение производной;
- табличные решения производных элементарных функций, в том числе обратных тригонометрических функций;

уметь:

- находить производную функции;

- находить дифференциал функции;
- дифференцировать элементарные функции.

Сведения из теории:

Табличные значения производных элементарных функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$c' = 0$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx+b)' = k$ $(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
---	---	---

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,
2. $(xy)' = x'y + xy'$,
3. $\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}$.

Пример 1

Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 1 вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2 \cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{3-1} + 5 \cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2

Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение:

воспользуемся формулами и правилом 2 вычисления производных:

$$f'(x) = (\sqrt{x}(x-3))' = (\sqrt{x})'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} \cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите производную функции:

1 вариант 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$; 2) $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$; 4) $f(x) = \frac{(x^2-1)(x+3)}{15}$.	2 вариант 1) $f(x) = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt{3x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$; 4) $f(x) = (x^2+3)(x-4)$.
---	--

3 вариант 1) $f(x) = 2x^2\sqrt{x} - 4x + 11 + \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x}$; 3) $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$; 4) $f(x) = \ln x(x+3)$.	4 вариант 1) $f(x) = 3x\sqrt[3]{x} - 2x + 5 + \frac{2}{\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = \sqrt{x+1}(x^3 - 5)$; 3) $f(x) = \frac{9x+1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{x+3}$.
5 вариант 1) $f(x) = 3x^3\sqrt{x} - 2x + 2 + \frac{2}{x^2\sqrt{x}}$; 2) $f(x) = 0,5(x+1)^2$; 3) $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$; 4) $f(x) = \frac{(x+2)(x-5)}{12}$.	6 вариант 1) $f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2x^2}{\sqrt{x}} + 5$; 2) $f(x) = (x^3 + 1)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x+2}$; 4) $f(x) = (x^2 - 1)(x+3)$.
7 вариант 1) $f(x) = \frac{-2x^3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3x^2}{\sqrt{x}} + 5x - 1$; 2) $f(x) = (x^3 - 2)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3 - 2}{4x}$; 4) $f(x) = \ln x(e^x - 1)$.	8 вариант 1) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}x^4 - 0,5x^2 - 5$; 2) $f(x) = \sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - x)$; 3) $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; 4) $f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$.
9 вариант 1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3$; 2) $f(x) = (x-1)\sqrt{x+1}$; 3) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$; 4) $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 1)$.	

Контрольные вопросы:

1. Перечислите значения производных некоторых табличных функций.
2. Сформулируйте правила вычисления производных.

Сведения из теории:

Производная сложной функции

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in (a;b)$, имеет производную в точке $x_0 \in (a;b)$, а функция $z = f(x)$ имеет производную в точке $y_0 = g(x_0)$. Тогда сложная функция $z(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0 , которая вычисляется по формуле:

$$z'(x_0) = (f(g(x_0)))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Пример 1

Вычислите производную функции $y = (x^2 + 3x + 10)^2$.

Решение:

представим заданную функцию как композицию квадратичной функции и степенной

$$y = (x^2 + 3x + 10)^2;$$

$$g(x) = x^2 + 3x + 10;$$

$$f(x) = (g(x))^2;$$

$$f'(x) = ((g(x))^2)' = 2g(x) \cdot (g(x))';$$

$$y' = 2(x^2 + 3x + 10) \cdot (x^2 + 3x + 10)' = 2(x^2 + 3x + 10)(2x + 3).$$

Производные высших порядков

Вторая производная это производная от первой производной, т.е. $y'' = (y')'$, и т.д.

Производные высших порядков обозначаются римскими цифрами.

Пример 2

Найти четвертую производную $y = x^6 + 4x + 12$.

Решение:

вычисляем последовательно производные:

$$y' = 6x^5 + 4;$$

$$y'' = 30x^4;$$

$$y''' = 120x^3;$$

$$y^{IV} = 360x^2.$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислите значение «сложной» производной в указанной точке:

1 вариант 1) $f(x) = \sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln \cos x$; $f'(-\pi/3)$; 3) $f(x) = \sin 2x - \cos^2 x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{\sin x}$; $f'(0)$.	2 вариант 1) $f(x) = \cos^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln \sin x$; $f'(\pi/6)$; 3) $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{ctg} x$; $f'(-\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{\cos 2x}$; $f'(\pi/4)$.
3 вариант 1) $f(x) = \ln \sin^2 x$; $f'(\pi/4)$; 2) $f(x) = \cos^2 x^2$; $f'(\sqrt{\pi}/2)$; 3) $f(x) = 2 \sin^2 x \cos x$; $f'(\pi/2)$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 3x$; $f'(0)$; 5) $f(x) = e^{\sin 2x} - 3e^{\cos 2x}$; $f'(0)$.	4 вариант 1) $f(x) = -2 \sin^2 x$; $f'(-\pi/4)$; 2) $f(x) = \ln \cos x$; $f'(\pi/3)$; 3) $f(x) = 2 \sin 2x + 3 \cos 3x$; $f'(0)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$; $f'(\pi/4)$; 5) $f(x) = e^{-2 \sin x}$; $f'(0)$.
5 вариант 1) $f(x) = \ln \cos^2 2x$; $f'(\pi/8)$; 2) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; $f'(\pi/4)$; 3) $f(x) = \ln \sqrt{\cos 2x}$; $f'(\pi/8)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} 2x$; $f'(\pi/8)$; 5) $f(x) = e^{\cos 2x} - 2e^{\sin 2x}$; $f'(\pi/4)$.	6 вариант 1) $f(x) = \ln \operatorname{tg}^2 2x$; $f'(\pi/24)$; 2) $f(x) = \cos^3 x$; $f'(\pi/4)$; 3) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x$; $f'(\pi/4)$; 4) $f(x) = e^{-\sin x} - e^{-\cos x}$; $f'(\pi/2)$; 5) $f(x) = \ln \sqrt{\sin x}$; $f'(\pi/4)$.
7 вариант 1) $f(x) = \ln \cos^2 4x$; $f'(\pi/16)$; 2) $f(x) = 4 \cos^2 x$; $f'(\pi/4)$; 3) $f(x) = 4 \sin^5 2x$; $f'(\pi/8)$; 4) $f(x) = \ln \operatorname{tg} 3x$; $f'(\pi/12)$; 5) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}$; $f'(\pi/2)$.	8 вариант 1) $f(x) = \ln \sqrt{\sin x}$; $f'(\pi/8)$; 2) $f(x) = \cos^4 3x$; $f'(\pi/6)$; 3) $f(x) = \ln \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$; $f'(\pi/12)$; 4) $f(x) = \arcsin 4x + e^{3x}$; $f'(0)$; 5) $f(x) = 5 \arccos \sqrt{x}$; $f'(1/2)$.
9 вариант 1) $f(x) = \ln \sqrt{\cos 2x}$; $f'(-\pi/8)$;	
2) $f(x) = \sin^4 6x$; $f'(\pi/3)$;	

$$3) f(x) = \ln \sqrt{\operatorname{ctg} 3x}; \quad f'(-\pi/12);$$

$$4) f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}; \quad f'(1/4);$$

$$5) f(x) = 5 \arccos \sqrt{1-x}; \quad f'(1/2).$$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления производных сложной функции.
2. Что называется второй производной данной функции?

Практическое занятие № 48

Нахождение наименьшего, наибольшего значения функции на отрезке

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение точек максимума (минимума) функции;
- зависимость поведения функции от знака первой производной;

уметь:

- применять первую производную для нахождения промежутков монотонности функции;
- находить наименьшее, наибольшее значение функции на отрезке.

Сведения из теории:

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:

- 1) найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
- 2) найти значения функции на концах промежутка;
- 3) сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

Пример 1 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке $[-2; 0]$.

Решение:

вычислим критические точки функции, принадлежащие заданному промежутку, с помощью первой производной:

$$y' = 3 + 4x + x^2;$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0;$$

$$D = 16 - 12 = 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2};$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = -3.$$

Т.к. $-3 \notin [-2; 0]$, $x = -1$ – критическая точка.

$$y(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^3 = -3 + 2 - \frac{1}{3} = -1\frac{1}{3}, \quad \underline{y(-1) = -1\frac{1}{3}}.$$

Вычислим значения функции на концах промежутка:

$$y(-2) = 3(-2) + 2(-2)^2 + \frac{1}{3}(-2)^3 = -6 + 8 - \frac{8}{3} = 2 - 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}, \quad \underline{y(-2) = -\frac{2}{3}}.$$

$$\underline{y(0) = 0}.$$

Сравним полученные значения: наименьшее значение функции равно $-1\frac{1}{3}$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 0 и достигается на правом конце промежутка.

Задания для самостоятельного решения:

Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках:

- 1) $y = -6x + x^2 + 13$ на промежутке $[0; 6]$;
- 2) $y = 8 - 0,5x^2$ на промежутке $[-2; 2]$;
- 3) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке $[1; 3]$;
- 4) $y = 6x^2 - x^3$ на промежутке $[-1; 6]$;
- 5) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ на промежутке $[-4; 4]$;
- 6) $y = -24x + 9x^2 - x^3 + 10$ на промежутке $[0; 3]$;
- 7) $y = x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке $[-4; -1]$;
- 8) $y = \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке $[-3; 1]$;
- 9) $y = -3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке $[-5; 0]$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правила вычисления наименьшего и наибольшего значения функции на промежутке.

Практическое занятие № 14

Применение производной к построению графиков функций.

Цель работы:

студент должен:

знать:

- общую схему построения графиков функций;

уметь:

- исследовать функцию с помощью первой, второй производной;

- строить графики функций.

Сведения из теории:

Общая схема построения графиков функций:

- 1) найти область определения функции;
- 2) найти точки пересечения графика функции с осями координат;
- 3) найти промежутки монотонности функции и экстремумы функции;
- 4) найти промежутки выпуклости и точки перегиба;
- 5) построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Пример 1

Исследовать функцию $y = (x+1) \cdot (x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x . Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y = (x+1) \cdot (x-2)^2$ пересекает ось Ox при $y=0$, т. е.

$$(x+1) \cdot (x-2)^2 = 0;$$

$$x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0;$$

$$x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1) \cdot (x-2)^2$ пересекает ось Оу при $x=0$, т. е.

$$y=(0+1) \cdot (0-2)^2=1 \cdot 4=4.$$

Т.о. мы получили три точки: $(-1; 0)$, $(2; 0)$, $(0; 4)$.

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

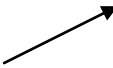
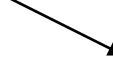
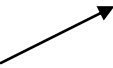
$$y'=((x+1) \cdot (x-2)^2)'=3x \cdot (x-2).$$

Из уравнения $y' \leq 0$ найдем критические точки:

$$3x \cdot (x-2)=0;$$

$$x_1=0, x_2=2.$$

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y		4		0	
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале $(0; 2)$, имеет максимум при $x=0$ и минимум при $x=2$: $y_{\max}=y(0)=4$; $y_{\min}=y(2)=0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$$y''=(3x \cdot (x-2))'=6 \cdot (x-1).$$

Кривая выпукла там, где $y'' < 0$, т. е.

$$6 \cdot (x-1) < 0,$$

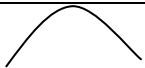
$$x < 1.$$

Кривая вогнута там, где $y'' > 0$, т. е. $x > 1$.

На интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; на интервале $(1, +\infty)$ – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:

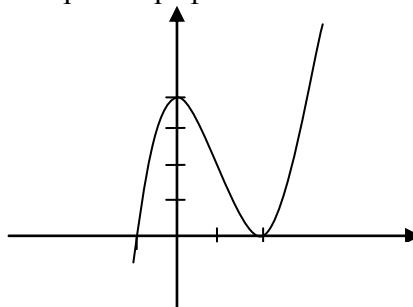


Рисунок 23. График функции $y=(x+1) \cdot (x-2)^2$

Задания для самостоятельного решения:

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
-----------	-----------	-----------

$y = -x^4 + 8x^2 + 9.$	$y = x^3 - 3x.$	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8.$
4 вариант $y = x^4 - 5x^2 + 4.$	5 вариант $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$	6 вариант $y = x^3 - 12x + 4.$
7 вариант $y = -x^3 + x.$	8 вариант $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2.$	9 вариант $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2.$

Контрольные вопросы:

1. Что называется областью определения и областью значений функции?
2. Приведите примеры применения первой производной к исследованию функции.
3. Приведите примеры применения второй производной к исследованию функции.
4. Расскажите общую схему исследования и построения графика функции.

Практическое занятие № 15

Цель работы: Построение графиков с помощью производной

студент должен:

знать, алгоритм исследования уметь: строить графики

№1. Исследовать функцию, при помощи производной построить график. 1) $y = x^4 - 1$; 2) $y = 4x^3$	№2. Исследовать функцию, при помощи производной построить график. 1) $y = 1\sqrt{3}x^3 - x^2 - 3x + 9$; 2) $y = x^2 - 2x - 3$;	№3. Исследовать функцию, при помощи производной построить график. 1) $y = 1\sqrt{4}x^4 - 2x^2 + 7\sqrt{4}$; 2) $y = x^3 - 4x$;
№4. Исследовать функцию, при помощи производной построить график. 1) $y = 1\sqrt{3}x^3 + x^2 - 3x - 9$; 2) $y = x^2 + 2x - 3$;	5. Исследовать функцию, при помощи производной построить график. 1) $y = -x^4 + 6x^2 - 9$; 2) $y = -4x^3 + 12x$;	№6. Исследовать функцию, при помощи производной построить график. 1) $y = -x^4 + 4x^2 - 5$; 2) $y = -4x^3 + 8x$;

Практическая работа №16

Тема: Вычисление интегралов

Задания для самостоятельной работы

1.1 $\int_{-1}^2 25x^4 dx$	1.6 $\int_{-1}^2 8x^3 dx$	1.11 $\int_{-1}^2 64x^7 dx$
1.2 $\int_0^1 (2x^2 + x - 1) dx$	1.7 $\int_0^2 (x^3 - 1) dx$	1.12 $\int_0^4 (3 + x^3) dx$
1.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$	1.8 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	1.13 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$
1.4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$	1.9 $\int_0^4 \frac{dx}{16 + x^2}$	1.14 $\int_1^2 \frac{2dx}{x}$
1.5 $\int_1^2 \frac{dx}{(2x + 1)^2}$	1.10 $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx$	1.15 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

Практическая работа №17

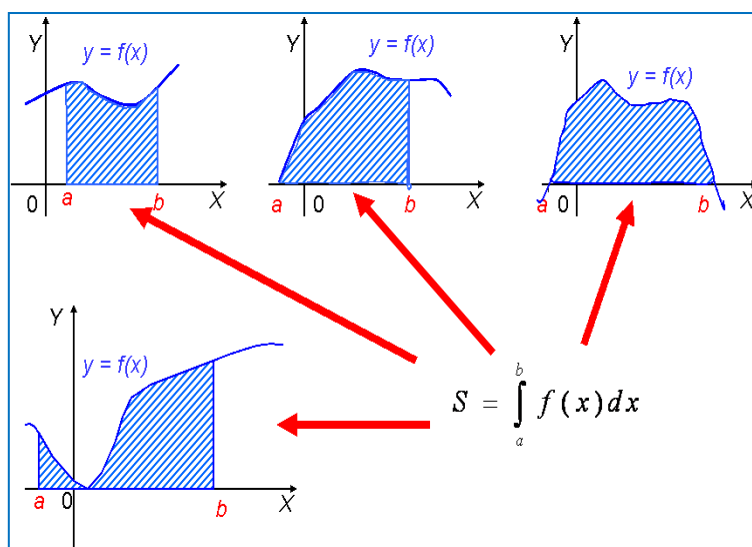
Тема: Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Цели:

- Повторить знания о первообразной.
- Закрепить навыки нахождения табличных интегралов, площадей криволинейных трапеций с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
- Проверить уровень сформированности навыка нахождения первообразных.
- Способствовать выработке вычислительных навыков.

Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность

Теория:



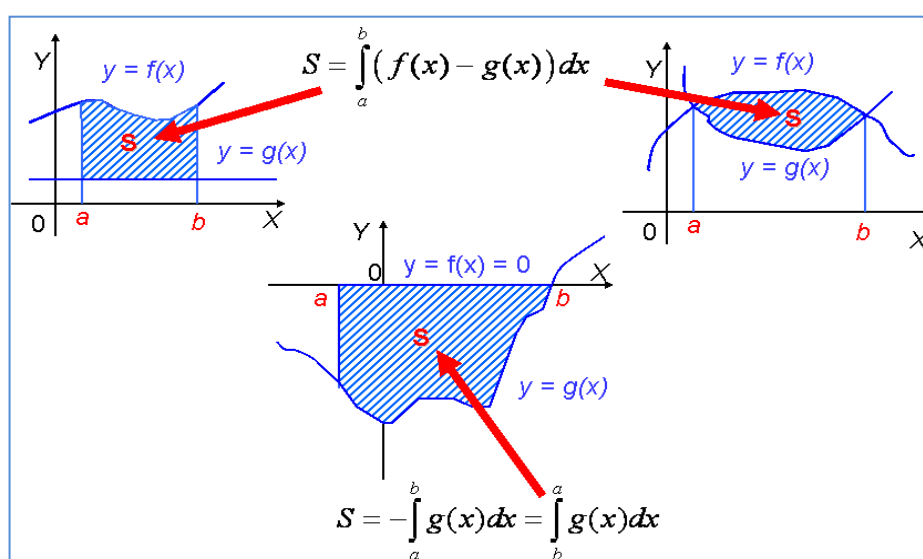
Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной заданными линиями. Результат округлить до 10^{-2} .

2.1 $y = x^2 - 4x + 4$ $x = 0 \quad y = 0$	2.6 $y = x^2 - 4x + 3$ $x = 0 \quad y = 0$	2.11 $y = x^2 + 5x + 6$ $y = 0 \quad x = 0$
2.2 $y = x^2 - 4x + 3$ $x = -1 \quad y = 0$	2.7 $y = x^2 + 5x + 6$ $x = -4 \quad y = 0$	2.12 $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 0 \quad y = 0$
2.3 $y = x^2 - 6x + 8$ $x = 1 \quad y = 0$	2.8 $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -1 \quad x = 0$	2.13 $y = -2x^2 + 4$ $x = -1 \quad x = 1$
2.4 $y = 2x^2 + 4x + 7$ $x = -2 \quad x = -1$	2.9 $y = 2\sqrt{x}$ $x = 1 \quad x = 4$	2.14 $y = x^4$ $x = 0 \quad x = 1$

2.5	$y = \frac{4}{x}$	$x = 2$	$x = 3$
2.10	$x = 2$	$x = 0$	$y = 2x + 3$
2.15	$y = -4x + 1$	$x = -2$	$x = 0$

1. Построить площадь криволинейной трапеции и вычислить её площадь, используя соответствующие формулы.

4.1	$y = x^2 - 4x + 4$ $y = 4 - x^2$	4.2	$y = x^2 - 2x + 2$ $y = 2 + 6x - x^2$	4.3	$y = x^2$ $y = x^3$
4.4	$y = x^2$ $y = 2x - x^2$	4.5	$y = x^2$ $y = 2x$	4.6	$y = 6 - 2x$ $y = 6 + x - x^2$



Практическое занятие № 18-19

Решение уравнений и неравенств. Иррациональные уравнения

1 вариант 1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{-3} \cdot \sqrt[3]{9} + \sqrt[4]{(-2)^4}$ б) $8^{\frac{1}{2}} : (8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}})$ 2. Упростить выражение: а) $2a\sqrt[3]{a^4} \cdot 3\sqrt[3]{a^2}$ б) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$ 3. Решите уравнения:	2 вариант 1. Вычислить: а) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4} + \sqrt[6]{(-3)^6}$ б) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (0,25)^{\frac{1}{4}}$ 2. Упростить выражение: а) $6a\sqrt[4]{a^5} : (3\sqrt[4]{a})$ б) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$ 3. Решите уравнения:
--	--

$a) \left(\frac{1}{5}\right)^{3-2x} = 125$ $б) 3^{x+3} - 3^x = 78$ $в) 2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$ $г) \sqrt{x^4 + 19} = 10$ 4. Решите неравенства: $a) 7^{3-x} < \frac{1}{49}$ $б) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-1} > 9^{x-1}$ $в) 3^x - 3^{x-3} > 26$ 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 3 \cdot 2^x - 2^y = 10 \end{cases}$	$a) \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x} = 81$ $б) 5^{x+2} + 5^x = 130$ $в) 3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$ $г) \sqrt{61 - x^2} = 5$ 4. Решите неравенства: $a) 5^{1-2x} > \frac{1}{125}$ $б) \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} < 4^{x-1}$ $в) 2^{x+2} + 2^{x+5} < 9$ 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6 \\ 2 \cdot 3^x + 3^y = 21 \end{cases}$
---	---

Практическое занятие № 20

Решение показательных уравнений и неравенств

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства степеней;
- способы решения показательных уравнений;

уметь:

- решать уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Сведения из теории:

Уравнение, содержащее переменную в показателе, называется *показательным*.

При решении показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{k(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) используется следующее свойство: $(a^{f(x)} = a^{k(x)}) \rightarrow (f(x) = k(x))$.

Преобразование показательного уравнения к виду $a^{f(x)} = a^{k(x)}$ выполняется многими способами. Рассмотрим некоторые способы.

Пример 1

Решите уравнение: $2^{x^2-7x+12} = 1$.

Решение:

по определению нулевого показателя степени: $1 = 2^0$, получим:

$$2^{x^2-7x+12} = 2^0.$$

По свойству $(a^{f(x)} = a^{k(x)}) \rightarrow (f(x) = k(x))$, получаем обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант:

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= 0, \\ x_1 &= 3, x_2 &= 4. \end{aligned}$$

Ответ: 3, 4.

Пример 2

Решите уравнение: $\left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x} = 128$.

Решение:

приведем обе части уравнения к основанию 2:

$$\left(\frac{1}{0,125}\right)^{2x} = 128,$$

$$\left(\frac{1000}{125}\right)^{2x} = 2^7,$$

$$8^{2x} = 2^7,$$

$$(2^3)^{2x} = 2^7,$$

$$2^{6x} = 2^7.$$

По свойству $(a^{f(x)}=a^{k(x)}) \rightarrow (f(x)=k(x))$, получаем $6x=7$ и $x=7/6$.

Ответ: $7/6$.

Пример 3.

Решите уравнение: $2^{x-2} = 5^{x-2}$.

Решение:

разделив обе части уравнения на одно и то же число 5^{x-2} , получим:

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}},$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = 1,$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^0,$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 4

Решите уравнение: $2^{x+3} - 2^x = 112$.

Решение:

вынесем общий множитель 2^x за скобку, получим:

$$2^{x+3} - 2^x = 112,$$

$$2^x(2^3 - 1) = 112,$$

$$2^x \cdot 7 = 112,$$

$$2^x = 112/7,$$

$$2^x = 16,$$

$$2^x = 2^4,$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнения:

1 вариант	2 вариант	3 вариант
1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$;	1) $2^{3x} = 5^x$;	1) $3^x = 7^{x/2}$;
		2) $3^{x+1} + 3^x = 108$.

2) $27 \cdot 3^{2(x+1)} - 3^{x+2} = 2$.	2) $3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x} =$ $= 4^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}}$.	
4 вариант 1) $5^{x-3}=2^{3-x}$; 2) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 16 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+3}$.	5 вариант $\frac{x-3}{2}$ 1) $5^{\frac{x-3}{2}} = 7^{x-3}$; 2) $5^{2x+1} = 5^x + 4$.	6 вариант 1) $3^{x-5}=81$; 2) $0,01 \sqrt[3]{0,1}=10^{-x}$.
7 вариант $\frac{x-1}{2}$ 1) $9^{\frac{x-1}{2}} = 27^{x^2-1}$; 2) $4^{x-2} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 = 0$.	8 вариант $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$; 2) $0,5^{\sqrt{x-3}} = 1$.	9 вариант 1) $1,8^{x^2-5x-11} = 5,832$; 2) $1000 \sqrt[3]{0,1} = 100^x$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется показательным уравнением?
2. Запишите свойство, которое используют при решении показательных уравнений.

Практическое занятие № 21

Решение логарифмических уравнений

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение логарифма;
- свойства логарифмов;

уметь:

- решать уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Сведения из теории:

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение: $\log_a x = b$.

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке $(0; +\infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения.

Теорема о корне: пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I , число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I .

По вышесказанной теореме следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение.

Из определения логарифма числа следует, что таким числом является a^b .

Пример 1

Решите уравнение: $\log_2(x^2+4x+3)=3$.

Решение:

данному уравнению удовлетворяют те значения x , для которых выполнено равенство: $x^2+4x+3=2^3$.

Получаем обычное квадратное уравнение $x^2+4x+3=8$ или $x^2+4x-5=0$, корни которого вычисляем с помощью дискриминанта: $x_1=1$; $x_2=-5$.

Пример 2

Решите уравнение: $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$.

Решение:

данное уравнение определено для тех значений x , при которых выполнены неравенства: $2x+3>0$ и $x+1>0$ (это следует из определения логарифма).

Для этих x данное уравнение равносильно уравнению: $2x+3=x+1$, из которого находим $x=-2$.

Выполняя проверку, убеждаемся, что $x=-2$ не удовлетворяет неравенству $x+1>0$. Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Пример 3

Решите уравнение: $\log_5^2 x - \log_5 x^2 - 3 = 0$.

Решение:

данное уравнение, воспользовавшись свойством степени логарифма, можно переписать в виде: $(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x - 3 = 0$.

Сделаем замену переменной: $t = \log_5 x$, тогда наше уравнение переписывается в виде: $t^2 - 2t - 3 = 0$, корни которого вычислим через дискриминант: $t_1 = 3$, $t_2 = -1$.

Вернемся к исходной переменной: $\log_5 x = 3$ или $\log_5 x = -1$.

Используя определение логарифма получаем корни исходного уравнения: $x_1 = 5^3 = 125$, $x_2 = 5^{-1} = 1/5 = 0,2$.

Задания для самостоятельного решения:

Решите уравнение:

1 вариант 1) $\log_4(5x+6) = 0$; 2) $\lg(x-9) + 2\lg\sqrt{2x-1} = 2$.	2 вариант 1) $\lg \frac{x-5}{x-2} = 2$; 2) $\lg(2x) + \lg(x+3) = \lg(12x-4)$.	3 вариант 1) $\log_3 x + \log_x 3 = 2,5$; 2) $4\lg^2 x - 2 = \lg x^2$.
4 вариант 1) $\log_{\frac{1}{5}}\left(7x + \frac{1}{25}\right) = 2$; 2) $4\lg^2 x + \lg x^2 - 2 = 0$.	5 вариант 1) $\log_{\frac{1}{2}}(5 - \log_3 x) = -2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x - \sqrt{x^2 - 16}) = -1$.	6 вариант 1) $\log_2(2x-1) = 4$; 2) $1 + \log_2(3x+1) = \log_2(x^2 - 5)$.
7 вариант 1) $\log_3(x-12) = 2$; 2) $\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$.	8 вариант 1) $\log_x 16 - \log_x 2 = 1/2$; 2) $\frac{1}{2}\lg(x^2 + 2x) = \lg\sqrt{x+2}$.	9 вариант 1) $\log_3(x+8) = -2$; 2) $\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5$.

Контрольные вопросы:

1. Что называется логарифмическим уравнением?
2. Перечислите способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком логарифма или в основании логарифма.

1 вариант 1. Вычислить: а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$ б) $2^{1+\log_2 5}$ в) $\lg 4 + 2\lg 5$ г) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$ 2. Найти область определения функции: а) $y = \log_2(3x - 15)$	2 вариант 1. Вычислить: а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$ б) $5^{\log_5 10 - 1}$ в) $\log_6 9 + 2\log_6 2$ г) $\lg \sqrt{30} - \lg \sqrt{3}$ 2. Найти область определения функции: а) $y = \log_4(-2x - 14)$
--	--

$\bar{b}) y = \log_{0,3}(x^2 - 6x + 5)$ 3. Решить уравнения: $a) \log_5(x+10) = 2$ $\bar{b}) \log_7(3x+4) = \log_7(5x+8)$ $\bar{c}) \log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_5 8$ $z) \log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$ 4. Решить неравенства: $a) \log_3(x+1) < -2$ $\bar{b}) \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \geq -2$ $\bar{c}) \log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$ 5. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - y = 7 \\ \log_2(2x + y) = 3 \end{cases}$	$\bar{b}) y = \log_3(x^2 - 2x - 3)$ 3. Решить уравнения: $a) \log_3(x-12) = 2$ $\bar{b}) \log_3(5x+3) = \log_3(7x+5)$ $\bar{c}) \log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = \log_2 9$ $z) \lg^2 x - 3\lg x - 4 = 0$ 4. Решить неравенства: $a) \log_2(x-5) \leq 2$ $\bar{b}) \log_{\frac{1}{2}}(2x+1) > -2$ $\bar{c}) \log_{0,3}(2x+5) \geq \log_{0,3}(x+1)$ 5. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 4x + y = -10 \\ \log_3(3y - x) = 2 \end{cases}$
---	---

Практическая работа № 49.

Тема: Решение тригонометрических неравенств.

Цель: Применение знаний при решении задач.

1 вариант.

Решить неравенства:

$$1) \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} ; 2) \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} ; 3) \sin x \leq \frac{1}{2} ; 4) \sin x > -\sqrt{3} \quad 5) \sin 3x > -\frac{1}{2}$$

2 вариант.

Решить неравенства:

$$1) \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} ; 2) \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} ; 3) \sin x \geq \frac{1}{2} ; 4) \sin x < -\sqrt{3} \quad 5) \sin 3x < -\frac{1}{2}$$

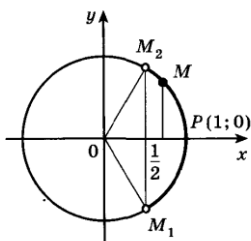
Методические рекомендации

Определение

Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.

При решении тригонометрических неравенств используют единичную окружность.

Задача Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$



По определению $\cos x$ – это абсцисса точки единичной окружности. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 . Абсциссу, большую $\frac{1}{2}$ имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2 . Таким образом, решениями неравенства $\cos x > \frac{1}{2}$ являются все числа x из промежутка $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$.

Все решения данного неравенства – множество интервалов $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решить неравенство $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

► Ординату, не меньшую $-\frac{1}{2}$, имеют все точки дуги M_1MM_2 единичной окружности (рис. 82). Поэтому решениями неравенства $\sin x \geq -\frac{1}{2}$ являются числа x , принадлежащие промежутку $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$. Все решения данного неравенства – множество отрезков

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad \triangleleft$$

Отметим, что все точки окружности, лежащие ниже прямой M_1M_2 , имеют ординату, меньшую $-\frac{1}{2}$ (рис. 82). Поэтому все числа $x \in \left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$ являются решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$. Все решения этого неравенства – интервалы

$$\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

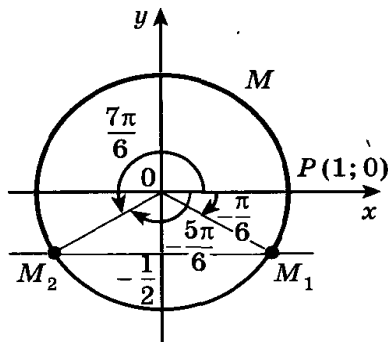


Рис. 82

Практическая работа № 22

Тема: «Тригонометрические уравнения и неравенства»

студент должен

знать:

- формулы решений простейших тригонометрических уравнений;
- основные тригонометрические тождества;
- основные методы решения уравнений и неравенств.

уметь:

- вычислять значения тригонометрических функций;
- выполнять преобразования тригонометрических уравнений;
- применять методы решения уравнений и неравенств.

Последовательность выполнения:

задания выполнять желательно в указанном порядке.

Методические указания:

ЗАДАНИЕ 1 Решите уравнения.

При решении уравнений используйте формулы простейших тригонометрических уравнений.

ЗАДАНИЕ 2 Решите уравнения методом подстановки переменной.

При решении уравнений используйте метод подстановки переменной, основное тригонометрическое тождество.

ЗАДАНИЕ 3 Решите уравнения, используя формулы тригонометрии.

При решении уравнений воспользоваться основными тригонометрическими формулами

ЗАДАНИЕ 4 Решите однородные уравнения.

- при решении однородных уравнений первой степени, выполните деление на одну из тригонометрических функций ($\sin x$ или $\cos x$);
- при решении однородных уравнений второй степени, выполните деление на одну из тригонометрических функций ($\sin^2 x$ или $\cos^2 x$);

ЗАДАНИЯ 5 Решите неравенства.

При решении неравенств воспользоваться единичной окружностью.

1 вариант.**1. Решите уравнения:**

а) $\cos x = \frac{1}{2}$

б) $\sin \frac{x}{2} = -1$

в) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

г) $\operatorname{tg} (2x - \frac{\pi}{4}) = 1$

2. Решите уравнения методом замены:

а) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

б) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:

а) $5\sin x + 3\sin 2x = 0$

б) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $2\sin 2x \cdot \cos 2x = 1$

г) $\sin(\frac{\pi}{6} + x) - \sin(\frac{\pi}{6} - x) = 1$

4. Решите однородные уравнения:

а) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

б) $\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$

5. Решите неравенства:

а) $\sin x \leq \frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{tg} 2x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2 вариант**1. Решите уравнения:**

а) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\cos \frac{x}{2} = -1$

в) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

г) $\operatorname{tg} (0,5x + \frac{\pi}{4}) = -1$

2. Решите уравнения методом замены:

а) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$

б) $-2\sin^2 x + 5\cos x + 4 = 0$

3. Решите уравнения, используя формулы тригонометрии:

а) $\cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\sin x + \sin 3x = 0$

в) $\cos(\frac{\pi}{4} + x) + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 17$

г) $\cos x - 4\sin 2x = 0$

4. Решите однородные уравнения:

а) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$

* б) $3\sin^2 x - 7\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$

5. Решите неравенства:

а) $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\operatorname{ctg} x > \sqrt{3}$

Цель работы Системы уравнений

1 группа. Решить системы уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} x+2y=7, \\ 2y^2+xy=14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+4y=5(x-y), \\ x^2-y^2=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-y)(y+3)=160, \\ y-x=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=x^2+1, \\ x+2y=5. \end{cases}$

2 группа. Решить системы уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} x^2-2y^2=14, \\ x^2+2y^2=18; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2=18, \\ xy=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y^2-x=5; \end{cases}$

3 группа. Решить системы уравнений способом замены переменных:

1) $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \frac{4}{x-y} + \frac{12}{x+y} = 3, \\ \frac{8}{x-y} - \frac{18}{x+y} = -1; \end{cases}$

Практическое занятие № 23

Цель работы Системы уравнений

Вариант 1

№ 1. Является ли пара чисел (6; - 8) решением системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 3x + 2y = 7. \end{cases}$$

№ 2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 2y = 6 \\ y = x - 1. \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - 2y = 7. \end{cases}$

Вариант 2.

№ 1. Является ли пара чисел (7; - 6) решением системы уравнений:

$$\begin{cases} xy + 42 = 0 \\ x^2 - 2y - 61 = 0. \end{cases}$$

№ 2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 2y = 54 \\ y = x - 3. \end{cases}$
б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 4y + x = 0. \end{cases}$

Практическая работа № 24

Изображение на координатной плоскости множества решений неравенства с двумя переменными и их систем

Цель работы:

студент должен:

знать:

- способы решения неравенства с двумя переменными и их систем;

уметь:

- изображать на координатной плоскости множества решений неравенства с двумя переменными и их систем.

Сведения из теории:

Решение неравенства с двумя переменными, а тем более системы неравенства с двумя переменными, представляется достаточно сложной задачей. Однако есть простой алгоритм, который помогает легко и без особых усилий решать на первый взгляд очень сложные задачи такого рода.

Пусть мы имеем неравенство с двумя переменными одного из следующих видов:

$$y > f(x); y \geq f(x); y < f(x); y \leq f(x).$$

Для изображения множества решений такого неравенства на координатной плоскости поступают следующим образом:

1. Строим график функции $y = f(x)$, который разбивает плоскость на две области.
2. Выбираем любую из полученных областей и рассматриваем в ней произвольную точку. Проверяем выполнимость исходного неравенства для этой точки. Если в результате проверки получается верное числовое неравенство, то заключаем, что исходное неравенство выполняется во всей области, которой принадлежит выбранная точка. Таким образом, множеством решений неравенства – область, которой принадлежит выбранная точка. Если в результате проверки получается неверное числовое неравенство, то множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.
3. Если неравенство строгое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, не включают в множество решений и границу изображают пунктиром. Если неравенство нестрогое, то границы области, то есть точки графика функции $y = f(x)$, включают в множество решений данного неравенства и границу в таком случае изображают сплошной линией.

Пример 1

Какое множество точек задается неравенством $x \cdot y \leq 4$?

Решение:

1) строим график уравнения $x \cdot y = 4$. Для этого сначала преобразуем его. Очевидно, что x в данном случае не обращается в нуль, т. к. иначе мы бы имели $0 \cdot y = 4$, что неверно. Значит, можем разделить наше уравнение на x . Получим: $y = 4/x$. Графиком данной функции является гипербола. Она разбивает всю плоскость на две области: ту, что между двумя ветвями гиперболы и ту, что снаружи их.

2) выберем из первой области произвольную точку, пусть это будет точка $(4; 2)$. Проверяем неравенство: $4 \cdot 2 \leq 4$ – неверно.

Значит, точки данной области не удовлетворяют исходному неравенству. Тогда можем сделать вывод о том, что множеством решений неравенства будет вторая область, которой выбранная точка не принадлежит.

3) т. к. неравенство нестрогое, то граничные точки, то есть точки графика функции $y = 4/x$, рисуем сплошной линией.

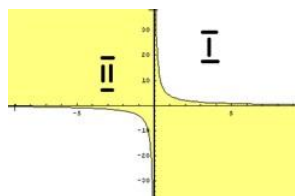


Рисунок 29. График функции $y = 4/x$

Закрасим множество точек, которое задает исходное неравенство цветом.

Задача для самостоятельного решения №1. Какое множество точек задается неравенством $x \cdot y \leq -6$?

Пример 2

Изобразить область, заданную на координатной плоскости системой
$$\begin{cases} y > x^2 + 2 \\ y + x > 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}.$$

Решение:

строим графики всех функций:

$y = x^2 + 2$ – парабола, $y + x = 1$ – прямая, $x^2 + y^2 = 9$ – окружность.

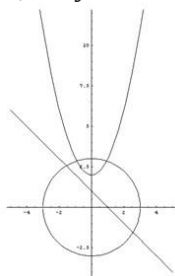


Рисунок 30. Графики функций $y = x^2 + 2$, $y + x = 1$, $x^2 + y^2 = 9$

Теперь разбираем каждое неравенство в отдельности:

1) $y > x^2 + 2$.

Берем точку $(0; 5)$, которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: $5 > 0^2 + 2$ – верно.

Следовательно, все точки, лежащие выше данной параболы, удовлетворяют первому неравенству системы. Закрасим их желтым цветом.

2) $y + x > 1$.

Берем точку $(0; 3)$, которая лежит выше графика функции. Проверяем неравенство: $3 + 0 > 1$ – верно.

Следовательно, все точки, лежащие выше прямой, удовлетворяют второму неравенству системы. Закрасим их зеленой штриховкой.

3) $x^2 + y^2 \leq 9$.

Берем точку $(0; -4)$, которая лежит вне окружности. Проверяем неравенство: $0^2 + (-4)^2 \leq 9$ – неверно.

Следовательно, все точки, лежащие вне окружности, не удовлетворяют третьему неравенству системы. Тогда можем сделать вывод о том, что все точки, лежащие внутри окружности, удовлетворяют третьему неравенству системы. Закрасим их фиолетовой штриховкой.

Не забываем о том, что если неравенство строгое, то соответствующую граничную линию следует рисовать пунктиром. Получаем следующую картинку:

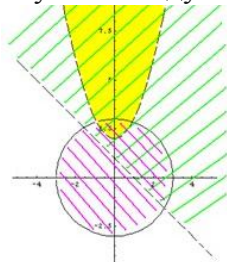


Рисунок 31. Решения неравенств $y > x^2 + 2$, $y + x > 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$

Искомая область – это область, где все три раскрашенных области пересекаются друг с другом:

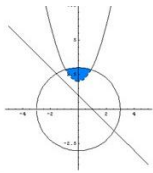


Рисунок 32. Решение системы неравенств
$$\begin{cases} y > x^2 + 2 \\ y + x > 1 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Задача для самостоятельного решения №2. Изобразить область, заданную на координатной плоскости системой:
$$\begin{cases} y^2 + x^2 \geq 4 \\ x \geq -y \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение неравенства с одной переменной.
2. В чем суть метода интервалов?

Практическое занятие № 25

Цель работы Системы неравенств

1 вариант

Укажите на координатной плоскости множество решений неравенств:

а). $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ x - y < 2 \end{cases}$ б). $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ (x - 3)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$ г). $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ xy \geq 0 \end{cases}$

2 вариант

Укажите на координатной плоскости множество решений неравенств:

а). $\begin{cases} y \geq x - 3 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$ б). $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq 1 \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 9 \end{cases}$ г). $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ xy \leq 0 \end{cases}$

Практическая работа № 26

Решение задач на перебор вариантов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение соединений, их видов;
- определение вероятности;
- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- по условию задачи различать виды соединений;
- вычислять разные виды соединений;
- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n,$$

$n!$ -читается « n -факториал», причем $0! = 1$ и $1! = 1$.

Используя приведенные выше определения имеем формулы:

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!},$$

при решении задач часто используется равенство:

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

или

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{m!}.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \leq m \leq n), \quad C_n^n = 1; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 1

Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение:

по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)]$.

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пример 2

Решить уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим:

$$n(n-1) = 30(n-5),$$

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1 = 6, \quad n_2 = 25$.

Пример 3

$$\text{Решите систему: } \begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}.$$

Решение:

решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$

$$x_1 = -11, x_2 = 12.$$

Т. к. $x > 2$, то -11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив $x=12$ в первое уравнение системы, получим

$$C_{12}^y = C_{12}^{y+2}.$$

Используя основное свойство сочетаний, имеем:

$$C_{12}^y = C_{12}^{12-y},$$

тогда

$$C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5.$$

Ответ: $x=12, y=5$.

Пример 4

Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение:

условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появления другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m , к числу всех возможных исходов n :

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е.
 $0 \leq P(A) \leq 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)=0$, а достоверному – вероятность $P(A)=1$.

Пример 5

В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение:

количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи $m=200$.

Число всех возможных вариантов $n=1000$.

По определению вероятности: $P(A)=200/1000=0,2$.

Пример 6

Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?

Решение:

общее число шаров $m=8$, из них черных $n=3$, по определению: $P(A)=3/8=0,375$.

Пример 7

Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

$$n = C_{20}^2 = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190;$$

число благоприятных исходов m равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

$$m = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

По определению: $P(A)=28/190=0,147$.

Пример 8.

В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?

Решение:

число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^5 = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов m . Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3:

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций m равно:

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184,$$

по определению: $P(A)=2184/8568=0,255$.

Задания для самостоятельного решения:

Решить следующие задачи, используя определение сочетаний, их видов:

1 вариант	2 вариант
1) Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?	1) Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
2) Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно	2) Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов,

сделать? 3) Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$.	если имеется материал семи различных цветов? 3) Решите уравнение: $30x = A_x^3$.
3 вариант 1) Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать? 2) Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр? 3) Решите уравнение: $30 A_{x-2}^4 = A_x^5$.	4 вариант 1) Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 2) На собрании должны выступить 5 человек (А, Б, В, Г, Д). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если А должен выступать первым? 3) Решите уравнение: $20 A_{x-2}^3 = A_x^5$.
5 вариант 1) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг? 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «журнал»? 3) Решите уравнение: $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$.	6 вариант 1) Сколькими способами можно составить список из 6 человек? 2) Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может из своего состава выбрать председателя собрания и секретаря? 3) Решите уравнение: $4C_{x+2}^{x-1} = A_x^3$.
7 вариант 1) Среди перестановок из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сколько таких, которые не начинаются цифрами 3 или 5? 2) Из города А в город В ведут 6 дорог, а из города В в город С – 3 дороги. Сколькими способами можно попасть из города А в город С? 3) Решите систему: $\begin{cases} A_x^y = 9A_x^{y-1} \\ 2C_x^y = 3C_x^{y-1} \end{cases}$.	8 вариант 1) В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в этом турнире? 2) Имеется 8 пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были разных размеров? 3) Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 153 \end{cases}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение соединения, их виды?
2. Приведите формулы для вычисления разных видов соединений.
3. Дайте определение случайного события, их виды. Приведите примеры.
4. Дайте классическое определение вероятности.

Свойства биномиальных коэффициентов

Сведения из теории:

Формула бинома Ньютона

Бином Ньютона – это формула разложения степени двучлена (бинома) $(a+b)^n$ в виде многочлена от a и b .

Запишем разложения бинома Ньютона для нескольких первых значений n :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Чтобы найти коэффициент при $a^k b^{n-k}$ в разложении бинома $(a+b)^n$ в общем случае, представим себе, что мы перемножаем n скобок и приводим подобные члены. Член $a^k b^{n-k}$ встретится столько раз, сколько можно указать k скобок (из n возможных), из которых мы возьмем множитель a (а из остальных автоматически возьмем b). Это число равно числу выборов k скобок из n возможных, которое носит название числа сочетаний из n по k и обозначается C_n^k .

В этих обозначениях формула имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Иными словами, число сочетаний из n по k равно коэффициенту при члене $a^{n-k} b^k$ в разложении n -ой степени двучлена $(a+b)$ поэтому числа сочетаний называют иначе *биномиальными коэффициентами*.

Эту связь можно использовать для вывода свойств сочетаний алгебраическими методами. Такой подход к выводу свойств комбинаторных объектов носит название *метода производящих функций*.

Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальные коэффициенты обладают большим количеством свойств.

Свойство 1. $C_n^1 = n$.

Свойство 2. $C_n^k = C_n^{n-k}$ – биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ – сумма биномиальных коэффициентов при фиксированном n равна 2^n .

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$ – суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой (и равны по половине от общей суммы).

Свойство 5. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ – рекуррентное соотношение, связывающее биномиальные коэффициенты для соседних степеней.

Пример 1

Разложить бином $(1+x)^6$ по степеням x .

Решение:

применяем формулу бинома Ньютона:

$$(1+x)^6 = 1^6 + C_6^1 x + C_6^2 x^2 + C_6^3 x^3 + C_6^4 x^4 + C_6^5 x^5 + x^6.$$

Значения биномиальных коэффициентов находим последовательно по формуле $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$:

$$C_6^3 = C_5^2 + C_5^3 = (C_4^1 + C_4^2) + (C_4^2 + C_4^3) = 4 + 2(C_3^1 + C_3^2) + 4 = 4 + 12 + 4 = 20.$$

$$\text{Т.о. } (1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

Задача для самостоятельного решения №1. Разложить бином $(1+x)^5$ по степеням x .

Пример 2

Возвести трехчлен $a+b+c$ в четвертую степень.

Решение:

применяем формулу бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^4 &= a^4 + b^4 + c^4 + \frac{4!}{3!}a^3b + \frac{4!}{3!}a^3c + \frac{4!}{3!}b^3a + \frac{4!}{3!}b^3c + \frac{4!}{3!}c^3a + \frac{4!}{3!}c^3b + \\ &+ \frac{4!}{2!2!}a^2b^2 + \frac{4!}{2!2!}a^2c^2 + \frac{4!}{2!2!}b^2c^2 + \frac{4!}{2!}a^2bc + \frac{4!}{2!}b^2ac + \frac{4!}{2!}c^2ab = \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 4(a^3b + a^3c + b^3c) + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + 4(b^3a + c^3a + c^3b) + \\ &+ 12(a^2bc + b^2ac + c^2ab).\end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения №2. Возвести трехчлен $a+b+c$ в третью степень.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу бинома Ньютона.
2. Перечислите свойства биномиальных коэффициентов.

Практическая работа № 52

Сложение и умножение вероятностей

Цель работы:

студент должен:

знать:

- теоремы сложения, умножения вероятностей;

уметь:

- вычислять вероятность событий.

Сведения из теории:

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Пример 1

В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; D – три детали стандартные.

Т.о., событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A=B+C+D$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(D)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_5^2}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{35}{76}$$

$$P(C) = \frac{C_5^2 \cdot C_{15}^1}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{5}{38}$$

$$P(D) = \frac{C_5^3}{C_{20}^3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A) = \frac{35}{76} + \frac{5}{38} + \frac{1}{114} = \frac{137}{228} = 0,601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Пример 2.

Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть A – число кратно 3, B – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, ..., 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}, \quad P(AB) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}.$$

Т.к. A и B совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A+B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15} = 0,467.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи, используя теоремы сложения, умножения вероятностей:

1) В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?

2) Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.

3) Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

4) Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте теоремы сложения, умножения вероятностей.

Практическая работа № 27

Понятие о независимости событий

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение независимых событий;

- теорему умножения вероятностей;

уметь:

- вычислять вероятность независимых событий.

Сведения из теории:

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A .

Событие B называют *независимым от события A* , если появление события A не изменяет вероятности события B , т. е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P_A(B) = P(B).$$

Итак, если событие B не зависит от события A , то событие A не зависит от события B ; это означает, что *свойство независимости событий взаимно*.

Для независимых событий теорема умножения имеет вид:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Два события называют *независимыми*, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют *зависимыми*.

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» независимы.

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два из них независимы. Например, события A , B , C попарно независимы, если независимы события A и B , A и C , B и C .

Пример 1

Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один – в красный цвет (A), один – в синий цвет (B), один – в черный цвет (C) и один – во все эти три цвета (ABC). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Решение:

т.к. из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)=2/4=1/2$.

Рассуждая аналогично, найдем $P(B)=1/2$, $P(C)=1/2$.

Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события A ?

Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна $1/2$. Другими словами, условная вероятность события A , вычисленная в предположении, что наступило событие B , равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы.

Аналогично приходим к выводу, что события A и C , B и C независимы. Итак, события A , B и C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет.

Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Т.о., допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что событие A

обязательно наступит. Следовательно, это событие достоверное и вероятность его равна единице.

Другими словами, условная вероятность $P_{BC}(A)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=1/2$. Итак, попарно независимые события A , B , C не являются независимыми в совокупности.

Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Пример 2

Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение:

вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A)=1/2$.

Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B)=1/2$.

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)=1/2 \cdot 1/2=1/4.$$

Пример 3

Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

Решение:

вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A):

$$P(A)=8/10=0,8.$$

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B):

$$P(B)=7/10=0,7.$$

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C):

$$P(C)=9/10=0,9.$$

Так как события A , B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность (по теореме умножения) равна:

$$P(ABC)=P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)=0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,9=0,504.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Вероятность того, что в магазине будет продана пара мужской обуви 44-го размера, равна 0,12; 45-го – 0,04; 46-го и большего – 0,01. Найти вероятность того, что будет продана пара мужской обуви не меньше 44-го размера.

2) При условиях задачи 1 найти вероятность того, что очередной будет продана пара обуви меньше 44-го размера.

3) В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.

4) В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором – черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение независимых событий.
2. Какие события называются попарно независимыми?

Практическое занятие №36

Параллельность прямой и плоскости

Цель работы:

студент должен:

знать:

- признаки параллельности прямой и плоскости;
- признаки параллельности плоскостей;
- признаки параллельности прямых в пространстве;

уметь:

- строить параллельные прямые, плоскости в пространстве.

Сведения из теории:

Признаки параллельности прямой и плоскости

1) Если прямая, лежащая вне плоскости, параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна этой плоскости.

2) Если прямая и плоскость перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности плоскостей

1) Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

2) Если две плоскости перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Признаки параллельности прямых в пространстве

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если в одной из пересекающихся плоскостей лежит прямая, параллельная другой плоскости, то она параллельна линии пересечения плоскостей.

Параллельные прямые

Возьмём, например, две такие прямые AB и DE , из которых одна пересекает некоторую плоскость P , а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P .

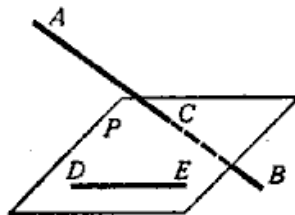


Рисунок 33. Непересекающиеся прямые

Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P , пересекающая прямую AB , и другая, содержащая её, а это невозможно.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.

Прямая и плоскость параллельные между собой

Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если прямая (AB) параллельна какой-нибудь прямой (CD), расположенной в плоскости (P), то она параллельна самой плоскости.

Если плоскость (R) проходит через прямую (AB), параллельную другой плоскости (P), и пересекает эту плоскость, то линия пересечения (CD) параллельна первой прямой (AB).

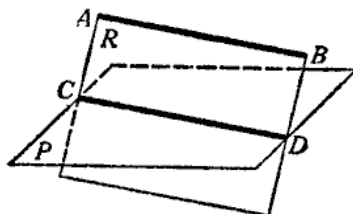


Рисунок 34. Прямая и плоскость параллельные между собой
Если прямая (AB) параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей (P и Q), то она параллельна линии их пересечения (CD).

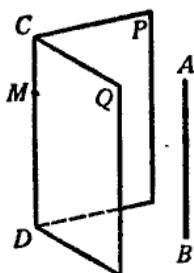


Рисунок 35. Параллельность прямой линии пересечения плоскостей
Если две прямые (AB и CD) параллельны третьей прямой (EF), то они параллельны между собой.

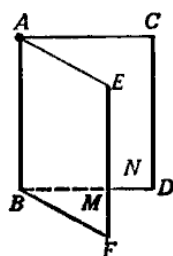


Рисунок 36. Параллельность трех прямых

Параллельные плоскости

Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Если две пересекающиеся прямые (AB и AC) одной плоскости (P) соответственно параллельны двум прямым (A_1B_1 и A_1C_1) другой плоскости (Q), то эти плоскости параллельны. Прямые AB и AC параллельны плоскости Q .

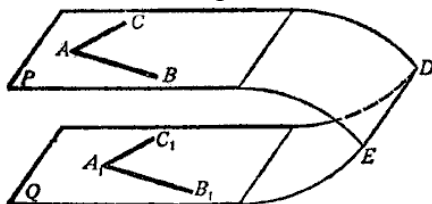


Рисунок 37. Параллельные плоскости

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи (выполнить чертеж, дать подробные пояснения):

1) Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости a , а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N . Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны.

2) Сколько существует плоскостей, проходящих через данную прямую и точку в пространстве?

3) В пространстве даны прямая a и точка M . Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных прямой a ?

4) Даны плоскость и точка M вне плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через M и параллельных плоскости?

5) В пространстве даны две параллельные прямые a и b . Сколько существует плоскостей, проходящих через прямую a и параллельных прямой b ?

6) Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Сколько существует пар параллельных плоскостей, одна из которых проходит через a , а другая – через b ?

7) В пространстве даны две пересекающиеся прямые a , b и не лежащая на них точка M . Сколько существует плоскостей, проходящих через M и параллельных прямым a и b ?

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте признаки параллельности прямой и плоскости.
2. Сформулируйте признаки параллельности плоскостей.
3. Сформулируйте признаки параллельности прямых в пространстве.

Практическое занятие №36

Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение параллельного переноса и его свойства;
- формулы для параллельного переноса;

уметь:

- выполнять геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости.

Сведения из теории:

Параллельный перенос и его свойства

Наглядно *параллельный перенос* определяется как преобразование, при котором точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Такое определение не является математически строгим, потому что в нем употребляется выражение «в одном и том же направлении», которое само нуждается в точном определении. В связи с этим параллельному переносу мы дадим другое, отвечающее тому же наглядному представлению, но уже строгое определение.

Введем на плоскости декартовы координаты x , y . Преобразование фигуры F , при котором произвольная ее точка $(x; y)$ переходит в точку $(x+a; y+b)$, где a и b одни и те же для всех точек $(x; y)$, называется параллельным переносом. Параллельный перенос задается формулами $x'=x+a$, $y'=y+b$.

Эти формулы выражают координаты x' , y' точки, в которую переходит точка $(x; y)$ при параллельном переносе.

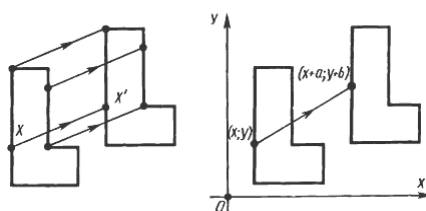


Рисунок 38. Параллельный перенос

Параллельный перенос есть движение

Действительно, две произвольные точки $A(x_1; y_1)$ к $B(x_2; y_2)$ переходят при параллельном переносе в точки $A'(x_1+a; y_1+b)$, $B'(x_2+a; y_2+b)$.

Поэтому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда $AB = A'B'$. Т. о., параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением, что и требовалось доказать.

Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

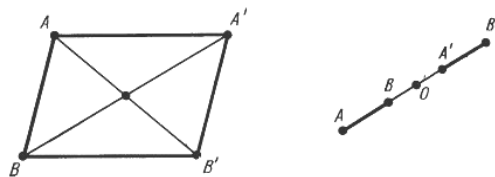


Рисунок 39. Параллельный перенос

Симметрия относительно плоскости

Симметрия относительно плоскости – это такое свойство геометрической фигуры, когда любой точке, расположенной по одну сторону плоскости, всегда будет соответствовать точка, расположенная по другую сторону плоскости, а отрезки, соединяющие эти точки, будут перпендикулярны плоскости симметрии и делятся ею пополам.

Следует отметить, что две симметричные фигуры или две симметричные части одной фигуры при всем их сходстве, равенстве объемов и площадей поверхностей, в общем случае, неравны, т.е. их нельзя совместить друг с другом. Это разные фигуры, их нельзя заменить друг другом, например, правая перчатка, ботинок и т.д. не годятся для левой руки, ноги. Предметы могут иметь одну, две, три и т.д. плоскостей симметрии.

Например, прямая пирамида (рис. 40а, 41а), основанием которой является равнобедренный треугольник, симметрична относительно одной плоскости P . Призма с таким же основанием (рис. 40б, 41б) имеет две плоскости симметрии. У правильной шестиугольной призмы (рис. 40в, 41в) их семь. Тела вращения: шар, тор, цилиндр, конус и т.д. имеют бесконечное количество плоскостей симметрии.

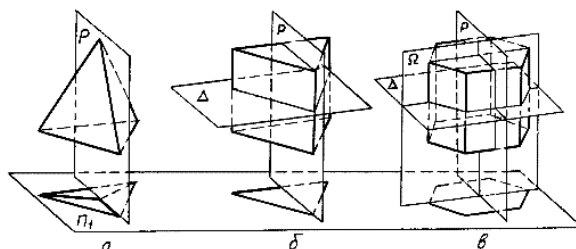


Рисунок 40. Плоскости симметрии

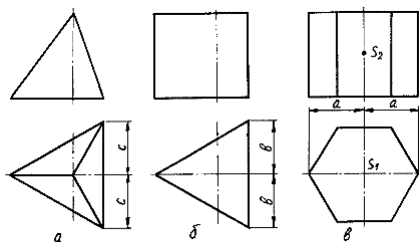


Рисунок 41. Изображение плоскостей симметрии

На чертежах плоскости симметрии изображаются тонкими штрихпунктирными линиями, являющимися как бы следами этих плоскостей. Если такой след совпадает с другой линией чертежа, например, с контурной, то она проводится в виде тонких штрихов, выводимых за контур изображения на 5 – 8 мм. На чертеже наносятся следы только тех плоскостей симметрии, которые перпендикулярны плоскости проекций данного изображения.

При наличии нескольких подобно расположенных плоскостей симметрии, как у призмы (рис. 40б), на чертеже изображается только одна взаимно перпендикулярная пара следов, по возможности тех, которые параллельны плоскостям проекций.

Для геометрических тел с плоскостями симметрии, параллельными их основаниям, например для призм, следы плоскостей симметрии на чертежах показывать не принято.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

2) Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат – на квадрат.

3) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты (плоскости квадратов перпендикулярны плоскости параллелограмма). Используя параллельный перенос, докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD .

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллельного переноса и перечислите его свойства.
2. Запишите формулы для параллельного переноса.

Практическое занятие №36

Изображения пространственных фигур

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства параллельного проектирования;

уметь:

- изображать пространственные фигуры на плоскости с помощью параллельного проектирования.

Сведения из теории:

Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием.

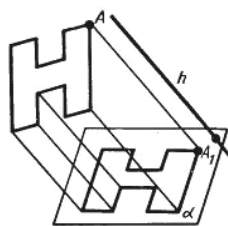


Рисунок 44. Изображение пространственных фигур на плоскости

Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками.

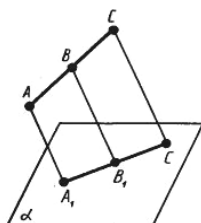


Рисунок 45. Изображение отрезка на плоскости

Действительно, все прямые, проектирующие точки отрезка AC , лежат в одной плоскости, пересекающей плоскость α по прямой A_1C_1 . Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1 .

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}.$$

Пример 1

Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

Решение:

при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Построить изображение правильного треугольника ABC , изображение высоты BH и биссектрисы AK .

2) Трапеция $ABCD$ – параллельная проекция равнобедренной трапеции. Построить ось симметрии и высоту данной трапеции.

3) Начертите параллельную проекцию ромба $ABCD$, имеющего угол $A=60^\circ$. Постройте изображение высоты этого ромба, проведенной из вершины острого угла.

Контрольные вопросы:

1. Что называется параллельной проекцией?
 2. Перечислите свойства параллельного проектирования.
 3. Что является параллельной проекцией отрезка, треугольника, прямоугольника, квадрата, окружности?

4. Какие величины не изменяются при параллельном проектировании? (длина отрезка, градусная мера углов, отношения длин отрезков, отношение площадей двух фигур)?

5. Может ли при параллельном проектировании параллелограмма получиться трапеция и наоборот?

Практическое занятие №28

Вершины, ребра, грани многогранника

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойство, связывающее число вершин, ребер и граней многогранника;

уметь:

- устанавливать связь между числом плоских углов Π многогранника и числом его ребер P .

Сведения из теории:

Для выпуклых многогранников имеет место свойство, связывающее число его вершин, ребер и граней, доказанное в 1752 году Леонардом Эйлером, и получившее название теоремы Эйлера.

Прежде чем его сформулировать рассмотрим известные нам многогранники и заполним следующую таблицу, в которой B – число вершин, P – ребер и Γ – граней данного многогранника:

Название многогранника	B	P	Γ
Треугольная пирамида	4	6	4
Четырехугольная пирамида	5	8	5
Треугольная призма	6	9	5
Четырехугольная призма	8	12	6
n -угольная пирамида	$n+1$	$2n$	$+1$
n -угольная призма	$2n$	$3n$	$n+2$
n -угольная усеченная пирамида	$2n$	$3n$	$n+2$

Из этой таблицы непосредственно видно, что для всех выбранных многогранников имеет место равенство $B-P+\Gamma=2$. Оказывается, что это равенство справедливо не только для этих многогранников, но и для произвольного выпуклого многогранника.

Заметим, что многоугольники можно деформировать, увеличивать, уменьшать или даже искривлять их стороны, лишь бы при этом не происходило разрывов сторон. Число вершин, ребер и граней при этом не изменится.

Для полученного разбиения многоугольника на более мелкие многоугольники имеет место равенство:

$$B-P+\Gamma=1,$$

где B – общее число вершин, P – общее число ребер и Γ – число многоугольников, входящих в разбиение. Ясно, что $\Gamma=\Gamma-1$, где Γ – число граней данного многогранника.

В любом выпуклом многограннике найдется грань с числом ребер меньшим или равным пяти

Для любого многогранника имеет место неравенство $3B \leq 2P$.

Задания для самостоятельного решения:

1) Может ли число вершин многогранника равняться числу его граней?

2) Установите связь между числом плоских углов P многогранника и числом его ребер R .

3) Граниями выпуклого многогранника являются только треугольники. Сколько у него вершин V и граней G , если он имеет: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Приведите примеры таких многогранников.

4) Из каждой вершины выпуклого многогранника выходит три ребра. Сколько он имеет вершин V и граней G , если у него: а) 12 ребер; б) 15 ребер? Нарисуйте эти многогранники.

5) В каждой вершине выпуклого многогранника сходится по четыре ребра. Сколько он имеет вершин V и граней G , если число ребер равно 12? Нарисуйте эти многогранники.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу, связывающую число вершин, ребер и граней многогранника.

Практическое занятие №28

Параллелепипед. Куб

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение параллелепипеда, куба;
- свойства прямоугольного параллелепипеда;
- формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба;

уметь:

- строить параллелепипед, куб;
- вычислять объем прямоугольного параллелепипеда, куба.

Сведения из теории:

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются *диагоналями параллелепипеда*.

Свойства параллелепипеда

- 1) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.
- 2) Противоположные грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.
- 3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

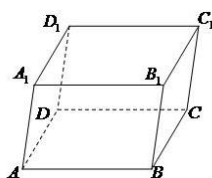


Рисунок 46. Параллелепипед

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом* ($ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед).

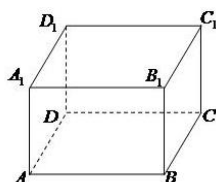


Рисунок 47. Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Свойства прямоугольного параллелепипеда

1) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

2) Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

3) Для куба формула упрощается: $4d^2 = 12a^2$.

Пример 1

Найти длину стороны куба, если его диагональ равна 5 см.

Решение:

из формулы для диагонали куба выразим его сторону:

$$a^2 = \frac{4d^2}{12}.$$

Тогда,

$$a = \sqrt{\frac{4d^2}{12}} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Т. к. параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда вычисляются по формулам для площади поверхности и объема призмы. Кроме того, объем прямоугольного параллелепипеда можно вычислять по формуле:

$$V = abc,$$

где a, b, c – три измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом. Все грани куба – равные квадраты.

Объем куба вычисляется по формуле:

$$V = a^3,$$

где a – измерение куба.

Как найти сумму длин всех ребер параллелепипеда

Для удобства введем обозначения: A и B стороны основания параллелепипеда; C – его боковая грань.

Т. о., в основании параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами A и B . Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны. Из этого определения следует, что против стороны A лежит равная ей сторона A . Поскольку противоположные грани параллелепипеда равны (вытекает из

определения), то верхняя его грань тоже имеет 2 стороны равные A . Таким образом, сумма всех четырех этих сторон равна $4A$.

То же, можно сказать, и о стороне B . Противоположная ей сторона в основании параллелепипеда равна B . Верхняя (противолежащая) грань параллелепипеда тоже имеет 2 стороны, равные B . Сумма всех четырех этих сторон равна $4B$.

Боковые грани параллелепипеда тоже являются параллелограммами (вытекает из свойств параллелепипеда). Ребро C одновременно является стороной двух соседних граней параллелепипеда. Поскольку противоположные грани параллелепипеда попарно равны, то все его боковые ребра равны между собой и равны C . Сумма боковых ребер – $4C$.

Таким образом, сумма всех ребер параллелепипеда: $4A+4B+4C$ или $4(A+B+C)$.

Частный случай прямого параллелепипеда – куб. Сумма всех его ребер равна $12A$.

Пример 2

Найдите ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, если ширина b больше его длины a на 1 см, высота c в 2 раза больше длины a , а диагональ d в 3 раза больше длины a .

Решение:

запишем основную формулу квадрата диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Выразим все измерения через заданную длину a : $b=a+1$; $c=2a$; $d=3a$.

Подставим в формулу:

$$9a^2 = a^2 + (a+1)^2 + 4a^2.$$

Решив квадратное уравнение, найдем длины всех ребер:

$$3a^2 - 2a - 1 = 0.$$

$$a=1; b=2; c=2.$$

Пример 3

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение:

обозначим известные ребра за a и b , а неизвестное за c . Площадь поверхности параллелепипеда выражается как

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Выразим c :

$$c = \frac{\frac{S}{2} - ab}{a + b}.$$

Подставляя заданные значения, имеем:

$$c = \frac{\frac{94}{2} - 12}{7} = 5.$$

Ответ: 5.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Надо покрасить пол в комнате. Расход краски на 1 м^2 – 120 г, комната имеет размеры 5 м и 4 м. Сколько потребуется краски?

2) Надо оклеить комнату с одним окном и дверью обоями от пола до потолка. Длина комнаты 5 м, ширина – 4 м, высота – 3 м. Площадь окна 3 м^2 , площадь двери 2 м^2 . Обои продаются целыми рулонами, 1 рулон на 10 м^2 . Сколько потребуется рулонов обоев?

3) Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

4) Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение параллелепипеда, куба, выполните соответствующие чертежи.
2. Перечислите свойства прямоугольного параллелепипеда.
3. Запишите формулы для вычисления объема параллелепипеда, куба.

Практическое занятие №28

Сечения куба, призмы, пирамиды

Цель работы:

студент должен:

знать:

- метод «следов»;
- правила построения сечений многогранников;

уметь:

- строить сечения куба, призмы, пирамиды.

Сведения из теории:

Сечения куба плоскостью

Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 48 слева). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник.

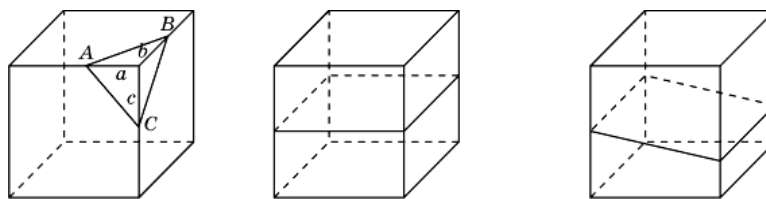


Рисунок 48. Сечения куба плоскостью

В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.

Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 48 посередине). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (рис. 48 справа). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 49 слева).

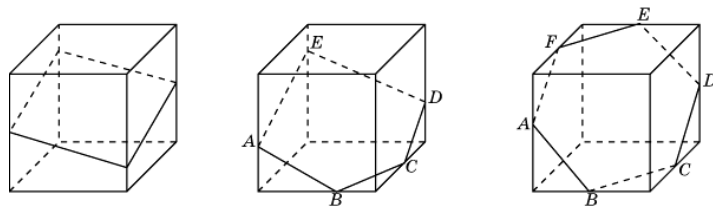


Рисунок 49. Сечения куба плоскостью

На рис. 49 посередине показано сечение куба плоскостью в форме пятиугольника $ABCDE$. Прямые AB и DE , CD и AE параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

На рис. 49 справа показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника $ABCDEF$. Прямые AB и DE , BC и EF , CD и AF параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников

Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

Пример 1

Пусть прямая k проходит через точки A , B и известны параллельные проекции A' , B' этих точек на плоскость π . Требуется найти точку пересечения прямой AB с плоскостью π .

Решение:

через точки A' , B' проведем прямую k' . Тогда пересечение прямой k с прямой k' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (см. рис. 50).

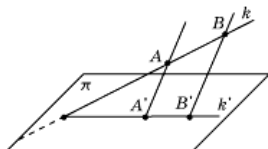


Рисунок 50.

Пример 2

Даны точки A , B , C и их параллельные проекции A' , B' , C' на плоскость π . Требуется построить линию пересечения плоскости ABC и плоскости π .

Решение:

используя решение предыдущей задачи, построим точки X и Y пересечения прямых AB и AC с плоскостью π . Прямая XY будет искомой линией пересечения плоскости ABC и плоскости π (см. рис. 51).

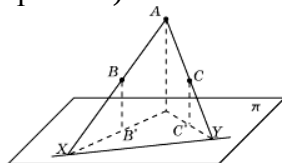


Рисунок 51.

Пример 3

Через данную точку C (C') провести прямую, параллельную данной прямой AB ($A'B'$), и найти ее точку пересечения с плоскостью π .

Решение:

через точку C проводим прямую, параллельную AB . Через точку C' проводим прямую, параллельную $A'B'$. Точка X пересечения этих прямых и будет искомой (см. рис. 52).

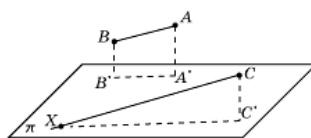


Рисунок 52.

Используя метод, рассмотренный, решим задачи на построение сечений куба, пирамиды и призмы

Пример 4

Построить сечение куба плоскостью проходящей через три точки A , B , C , принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (см. рис. 53).

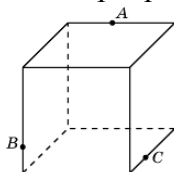


Рисунок 53.

Решение:

найдем пересечение прямой AB , лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекции A' , B' точек A , B на основание куба в направлении бокового ребра куба (см. рис. 54).

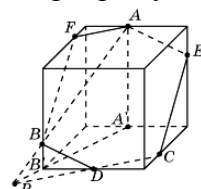


Рисунок 54.

Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P . Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP . Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D , B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD , и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E . Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD , и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F . Соединим точки A и F , B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью.

Пример 5

Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A , B , C , принадлежащие ее ребрам (см. рис. 55).

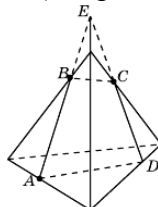


Рисунок 55.

Решение:

проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E . Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D . Соединим отрезками точки B и C , A и D . Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

- 1) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 , D и середину ребра CC_1 ?
- 2) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и DD_1 ?
- 3) Через середину ребра куба, перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали, проведено сечение. Определите его вид.
- 4) Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.
- 5) Через вершины A , C , D_1 куба $A...D_1$ проведено сечение. В каком отношении оно делит диагональ DB_1 , и какой образует угол с этой диагональю?
- 6) Каким является сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и CD ?
- 7) Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M , N – середины соответственно ребер AD , CD ?
- 8) Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1 , D и точку H , принадлежащую ребру CC_1 .
- 9) Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 56.

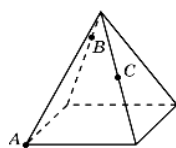


Рисунок 56.

- 10) Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 57.

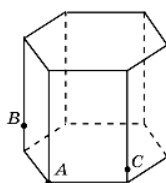


Рисунок 57.

Контрольные вопросы:

1. Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) трапеция; б) равнобедренная трапеция; в) неравнобедренная трапеция; г) прямоугольная трапеция; д) тупоугольная трапеция?
2. Какие многоугольники можно получить в сечении четырехугольной пирамиды плоскостью?
3. Какие могут быть сечения правильного тетраэдра плоскостью?

Практическое занятие №29

Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр)

Цель работы:

студент должен:

знать:

- определение правильных многогранников;
- виды, элементы, свойства правильных многогранников;
- уметь:
- строить правильные многогранники.

Сведения из теории:

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. слева). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также *правильным тетраэдром*, или просто *тетраэдром*, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

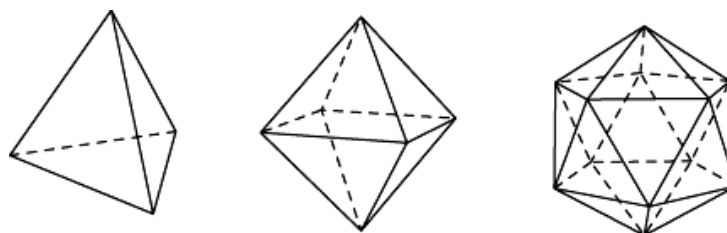


Рисунок 58. Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке посередине. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется *октаэдром*.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется *икосаэдром*.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника, не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. слева), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты, не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также *гексаэдром*.

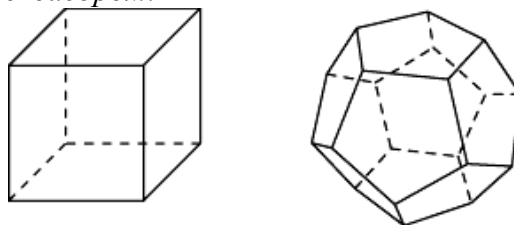


Рисунок 59. Правильные многогранники

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке справа. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется *додекаэдром*.

Задания для самостоятельного решения:

- 1) Чему равны плоские углы додекаэдра?
- 2) Представьте многогранник – бипирамиду, сложенную из двух правильных тетраэдров совмещением их оснований. Будет ли он правильным многогранником?
- 3) Является ли пространственный крест (фигура, составленная из семи равных кубов – рис. 60) правильным многогранником? Сколько квадратов ограничивает его поверхность? Сколько у него вершин V и ребер P ?

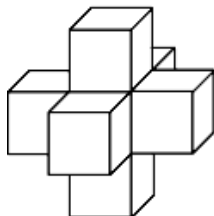


Рисунок 60.

- 4) Ребро октаэдра равно 1. Определите расстояние между его противоположными вершинами.
- 5) Сколько красок потребуется для раскраски граней правильных многогранников, так, чтобы соседние грани были окрашены в разные цвета?

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение правильного многогранника.
2. Сколько вершин, ребер и граней имеют: а) тетраэдр; б) октаэдр; в) куб; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

Практическое занятие №30

Осевые сечения и сечения параллельные основанию

Цель работы:

студент должен:

знать:

- свойства проекций;

уметь:

- строить сечения цилиндра.

Сведения из теории:

Сечения цилиндра

Сечения цилиндра плоскостью можно рассматривать как параллельные проекции основания цилиндра на эту плоскость. Поэтому, если плоскость параллельна плоскости основания, то в сечении получается круг, равный основанию.

Если плоскость сечения составляет некоторый угол с плоскостью основания цилиндра и не пересекает основания, то в сечении будет фигура, ограниченная эллипсом.

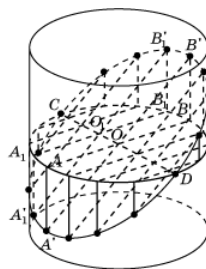


Рисунок 61. Сечение цилиндра

На рис. 61 показано построение точек эллипса, получающегося как сечение боковой поверхности цилиндра плоскостью.

Для этого зададим два сопряженных диаметра AB и CD . Через точку A проведем образующую и выберем на ней какую-нибудь точку A' , принадлежащую сечению. Прямая $A'O$ пересечет образующую, проходящую через точку B в некоторой точке B' , также принадлежащую сечению. Возьмем теперь на отрезке CD произвольную точку и проведем через нее прямую, параллельную $A'B'$. Ее точки пересечения с образующими цилиндра будут принадлежать сечению.

Возьмем прямоугольный лист бумаги и нарисуем на нем оси координат Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам (рис. 62).

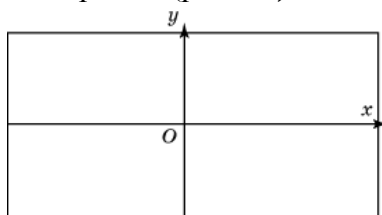


Рисунок 62.

Затем свернем этот лист в боковую поверхность прямого кругового цилиндра, радиус основания которого примем за единицу. Ось Ox свернется в окружность радиуса 1, а ось Oy станет образующей цилиндра (рис. 63).

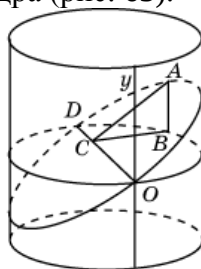


Рисунок 63.

Через диаметр OD полученной окружности проведем сечение, составляющее с плоскостью окружности угол в 30° . В этом случае сечением будет эллипс.

Задания для самостоятельного решения:

1) Нарисуйте цилиндр и плоскость, пересекающую его боковую поверхность по эллипсу.

2) Нарисуйте цилиндр и постройте несколько точек эллипса, получающегося в сечении его боковой поверхности плоскостью.

3) В основании цилиндра круг радиуса 5 см. Боковая поверхность цилиндра пересечена плоскостью. Найдите площадь сечения цилиндра этой плоскостью, если она образует с плоскостью основания угол: а) 30° ; б) 45° ; в) 60° .

4) Возьмем прямоугольный лист бумаги с нарисованными на нем осями координат. Свернем этот лист в боковую поверхность правильной четырехугольной призмы (рис. 64). Сторону основания призмы примем за 1 см. Через точки O и D проведем сечение плоскостью, составляющей с плоскостью основания угол 45° . Развернем лист бумаги. Выясните, какая при этом получится кривая? Что изменится, если сечение проводить под другими углами?

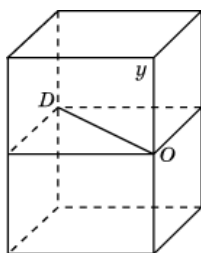


Рисунок 64.

Контрольные вопросы:

1. В каком случае сечением цилиндра плоскостью является круг?
2. Что будет сечением цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра?
3. Какую форму принимает поверхность воды в круглом наклонном стакане?
4. Может ли в сечении цилиндра плоскостью получиться: а) круг; б) прямоугольник; в) параллелограмм; г) трапеция д) треугольник?
5. Могут ли в сечениях цилиндра плоскостью получаться фигуры, отличные от круга, прямоугольника и эллипса?

Шар и сфера, их сечения

Сведения из теории:

Шаром принято называть тело, ограниченное сферой, т.е. шар и сфера – это разные геометрические тела.

Сфера – это фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на данном расстоянии.

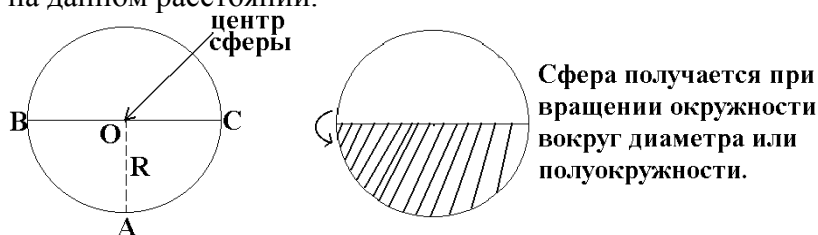


Рисунок 65. Сфера

Поверхность шара называют сферой. Если рассечь сферу плоскостью, получим в сечении окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через её центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели – это сечения земной поверхности плоскостями, которые параллельны экваториальной плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром сферы* и обычно обозначается *O*.

Расстояние от точек сферы до её центра называется *радиусом сферы* и обычно обозначается *R*. *Радиусом* также называется любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром. *Сфера* – это граница шара. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более чем на данное расстояние. Другими словами, *шар* – это объединение сферы и всех ее внутренних точек.

Всякое *сечение шара* плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Основные геометрические формулы

Площадь сферы:

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2.$$

Объем шара, ограниченного сферой:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

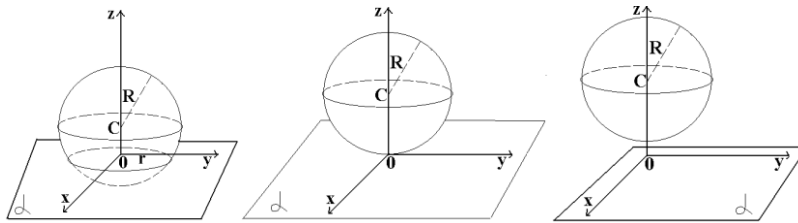


Рисунок 66. Взаимное расположение сферы и плоскости

Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

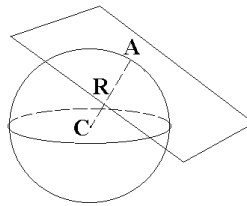


Рисунок 67. Касательная плоскость к сфере

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Сечение шара

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

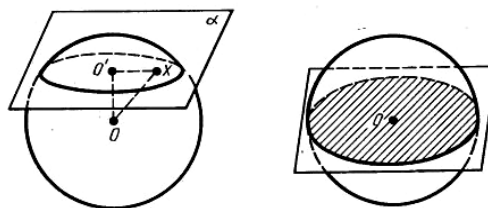


Рисунок 68. Сечение шара

Пример 1

Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ см}$$

или

$$d_2 = \sqrt{100 - 64} = 6 \text{ см.}$$

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче:

$$d=14 \text{ см.}$$

Пример 2

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга (рис. 69)?

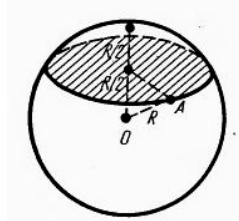


Рисунок 69.

Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно:

$$\frac{\pi \left(R \sqrt{\frac{3}{4}} \right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.

2) Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

3) Радиус шара равен 63 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.

4) Радиус шара R . Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60° к нему. Найти площадь сечения.

5) На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13 см. Радиус шара равен 13 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение шара, сферы.
2. Запишите формулы площади сферы, объема шара.
3. Приведите примеры взаимного расположения сферы и плоскости.

Практическое занятие №53

Расстояние между двумя точками. Вычисление координат середины отрезка

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления расстояния между двумя точками;
- формулы для вычисления координат середины отрезка;

уметь:

- вычислять расстояние между двумя точками, координаты середины отрезка.

Сведения из теории:

Длиной отрезка AB называется расстояние между точками A и B при заданном масштабе (отрезке единичной длины). Длину отрезка AB будем обозначать как $|AB|$.

Расстояние между двумя точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ в прямоугольной системе координат выражается формулой:

$$|A_1A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Точка C называется *серединой отрезка* AB , если она лежит на отрезке AB и находится на одинаковом расстоянии от его концов, т. е. $|AC| = |CB|$.

Координаты середины отрезка на плоскости

Введем прямоугольную декартову систему координат Oxy на плоскости. Пусть нам даны две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ и известно, что точка C – середина отрезка AB . Найдем координаты x_C и y_C точки C .

Рассмотрим случай, когда точки A и B не совпадают и не лежат одновременно на одной из координатных осей или на прямой, перпендикулярной одной из координатных осей.

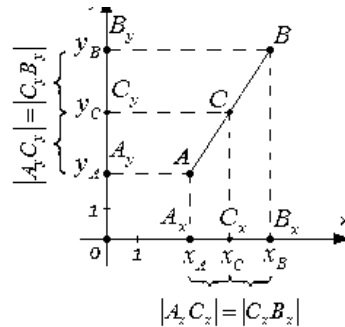


Рисунок 78. Координаты середины отрезка

По построению:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB на плоскости с концами в точках $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ имеет координаты $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Пример 1

На плоскости заданы координаты двух точек $A(-7; 3)$, $B(2; 4)$. Найдите координаты середины отрезка AB .

Решение:

пусть точка C – середина отрезка AB . Ее координаты равны полусуммам соответствующих координат точек A и B :

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-7 + 2}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB имеет координаты $\left(-\frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right)$.

Часто с нахождением координат середины отрезка связаны задачи, в которых фигурирует термин «медиана».

Пример 2

Найдите длину медианы AM в треугольнике ABC , если известны координаты его вершин $A(-1; 0)$, $B(3; 2)$, $C(9; -8)$.

Решение:

т. к. AM – медиана, то точка M является серединой стороны BC . Найдем координаты середины этого отрезка по известным координатам его концов:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+9}{2} = 6,$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2-8}{2} = -3.$$

Т. о., $M(6; -3)$.

Осталось воспользоваться формулой для вычисления расстояния между точками A и M :

$$|AM| = \sqrt{(6 - (-1))^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{58}.$$

Существуют различные задачи, в которых известны координаты середины отрезка и одного из его концов, а требуется найти координаты другого конца. Рассмотрим решение одной из них.

Пример 3

В прямоугольной системе координат трехмерного пространства дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Известно, что $C_1(1; 1; 0)$, а $M(4; 2; -4)$ – середина диагонали BD_1 . Найдите координаты точки A .

Решение:

диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке, и эта точка является серединой каждой из этих диагоналей. Таким образом, мы можем утверждать, что точка M является серединой отрезка AC_1 . Из формул для нахождения координат середины отрезка имеем:

$$x_M = \frac{x_A + x_{C_1}}{2} \Rightarrow x_A = 2x_M - x_{C_1} = 8 - 1 = 7,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{C_1}}{2} \Rightarrow y_A = 2y_M - y_{C_1} = 4 - 1 = 3,$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{C_1}}{2} \Rightarrow z_A = 2z_M - z_{C_1} = -8 - 0 = -8.$$

Итак, точка A имеет координаты $(7; 3; -8)$.

Задания для самостоятельного решения:

- 1) Вычислите периметр треугольника ABC , если $A(4; 0)$, $B(12; -2)$, $C(5; -9)$.
- 2) Вычислите длину медианы AM треугольника ABC , вершины которого имеют координаты $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.
- 3) Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный и вычислите его площадь, если вершины которого имеют координаты $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; 1)$.
- 4) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, и вычислите его диагонали, если $A(1; 1)$, $B(6; 1)$, $C(7; 4)$, $D(2; 4)$.

5) Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, и вычислите его площадь, если $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулу для вычисления координат середины отрезка.
2. Запишите формулу для вычисления расстояния между двумя точками.

Практическое занятие №53

Правила сложения векторов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- правила сложения векторов;

уметь:

- строить сумму векторов по правилу треугольника, параллелограмма;
- вычислять координаты суммы векторов.

Сведения из теории:

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).

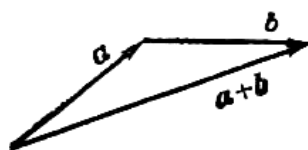


Рисунок 81. Правило треугольника

Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) *правилом параллелограмма*: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого параллелограмма, идущей из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

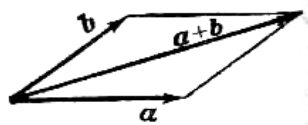


Рисунок 82. Правило параллелограмма

Сложение многих векторов производится при помощи последовательного применения правила треугольника, построим сумму четырех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.

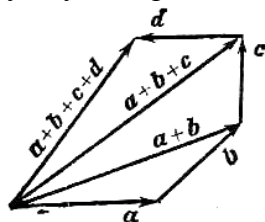


Рисунок 83. Правило многоугольника

Разность двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их есть вектор, идущий из конца $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу $\vec{a}$ («уменьшаемого»).

Два вектора равной длины, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны, называются *взаимно обратными*: если один из них обозначен символом $\vec{a}$, то другой обозначается символом $-\vec{a}$. Легко видеть, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Т. о., построение разности равносильно прибавлению к «уменьшаемому» вектора, обратного «вычитаемого».

Три вектора в пространстве можно складывать по *правилу параллелепипеда*: если на трех векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, как на ребрах, построить параллелепипед, то его диагональ, выходящая из общего начала данных векторов, и будет их суммой $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$:

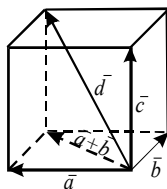


Рисунок 84. Правило параллелепипеда

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: 1) $\vec{a} + \vec{b}$, 2) $\vec{a} - \vec{b}$, 3) $-\vec{a} + \vec{b}$, 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, при вычитании вычитаются соответствующие координаты, т.е. если даны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, то координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \\ \vec{d} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Пример 1

Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (-3; 5; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; 8)$.

Решение:
по формулам

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \\ \vec{d} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),\end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (-3 + 4; 5 + (-2); 1 + 8) = (1; 3; 9), \\ \vec{d} &= (-3 - 4; 5 - (-2); 1 - 8) = (-7; 7; -7).\end{aligned}$$

Задания для самостоятельного решения:

Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{h}$; $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{h}$, если $\vec{a} = (4; -3; 10)$, $\vec{b} = (-4; 12; -1)$, $\vec{h} = (3; -7; -11)$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правило треугольника для сложения векторов.
2. Сформулируйте правило параллелограмма для сложения векторов.
3. Запишите формулы сложения (разности) векторов в координатах.

Практическое занятие №53

Умножение вектора на число

Цель работы:

студент должен:

знать:

- правило умножения векторов;

уметь:

- строить произведение вектора на число;

- вычислять координаты вектора $k\vec{a}$.

Сведения из теории:

Произведение $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа k ; он параллелен вектору $\vec{a}$ или лежит с ним на одной прямой и направлен так же, как вектор $\vec{a}$, если k – число положительное, и противоположно вектору $\vec{a}$, если k – число отрицательное.

Если $k=0$, для любого вектора $\vec{a}$ произведение $k\vec{a}$ равно нуль-вектору: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Если $k=1$, то $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Если $k=-1$, то $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ – вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

Пример 1

Даны векторы, совпадающие со сторонами треугольника ABC : $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$. Выразить через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор $\vec{AO}$, где O – точка пересечения медиан треугольника. Выполните рисунок.

Решение:

известно, что точка O пересечения медиан треугольника делит отрезок медианы в отношении 2:1, считая от вершины. Поэтому $\vec{AO} = \frac{2}{3}\vec{AD}$, где точка D – середина стороны CB .

Но вектор $\vec{CD} = \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}\vec{a}$; $\vec{DC} = -\frac{1}{2}\vec{a}$.

В треугольнике CAD вектор $\vec{DA} = \vec{DC} + \vec{CA} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Искомый вектор $\vec{AO} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

Задания для самостоятельного решения:

1) По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить каждый из следующих векторов: $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{b}$, $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$.

2) В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Построить каждый из следующих векторов: $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$, $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$, $\frac{-\vec{m} + \vec{n}}{2}$, $-\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$.

3) Точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC . Доказать, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$.

4) В правильном пятиугольнике $ABCDE$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{q}$, $\overrightarrow{EA} = \vec{r}$. Построить векторы: $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$, $\vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}$, $2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} - 3\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{r}$.

5) В параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{n}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{p}$ (рис. 85)

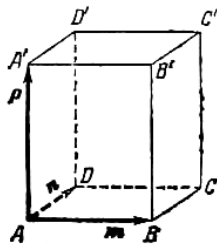


Рисунок 85.

6) Построить каждый из следующих векторов: $\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$, $\vec{m} + \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n} + \vec{p}$, $-\vec{m} - \vec{n} + \frac{1}{2}\vec{p}$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте правило умножения вектора на число.

Практическое занятие №31

Решение задач координатным методом

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления расстояния между двумя точками;
- формулы для вычисления координат середины отрезка;

уметь:

- использовать формулы расстояния между двумя точками и формулу для вычисления координат середины отрезка при решении задач координатным методом.

Сведения из теории:

Вычисление координат точки, равноудаленной от заданных точек рассмотрим на примере 137

Пример 1

Найти координаты точки O_1 , которая равноудалена от трех точек $A(7; -1)$ и $B(-2; 2)$ и $C(-1; -5)$.

Решение:

из формулировки условия задачи следует, что $O_1A=O_1B=O_1C$.

Пусть искомая точка O_1 имеет координаты $(a; b)$. По формуле:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

найдем:

$$O_1A = \sqrt{(a - 7)^2 + (b + 1)^2},$$

$$O_1B = \sqrt{(a + 2)^2 + (b - 2)^2},$$

$$O_1C = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 5)^2}.$$

Составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{(a - 7)^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{(a + 2)^2 + (b - 2)^2} \\ \sqrt{(a - 7)^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 5)^2} \end{cases}.$$

После возведения в квадрат левой и правой частей уравнений запишем:

$$\begin{cases} (a - 7)^2 + (b + 1)^2 = (a + 2)^2 + (b - 2)^2 \\ (a - 7)^2 + (b + 1)^2 = (a + 1)^2 + (b + 5)^2 \end{cases}.$$

Упростив, запишем:

$$\begin{cases} -3a + b + 7 = 0 \\ -2a - b + 3 = 0 \end{cases}.$$

Решив систему, получим: $a=2; b=-1$.

Точка $O_1(2; -1)$ равноудалена от трех заданных в условии точек, которые не лежат на одной прямой. Эта точка – есть центр окружности, проходящей через три заданные точки.

Вычисление абсциссы (ординаты) точки, которая лежит на оси абсцисс (ординат) и находится на заданном расстоянии от данной точки, рассмотрим на примере

Пример 2

Расстояние от точки $B(-5; 6)$ до точки A , лежащей на оси Ox равно 10. Найти координаты точки A .

Решение:

из формулировки условия задачи следует, что ордината точки A равна нулю и $AB = 10$.

Обозначив абсциссу точки A через a , запишем $A(a; 0)$.

По формуле

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

находим:

$$AB = \sqrt{(a+5)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{(a+5)^2 + 36}.$$

Получаем уравнение

$$\sqrt{(a+5)^2 + 36} = 10.$$

Упростив его, имеем

$$a^2 + 10a - 39 = 0.$$

Корни этого уравнения $a_1 = -13$; $a_2 = 3$.

Получаем две точки $A_1(-13; 0)$ и $A_2(3; 0)$ – рис. 79.

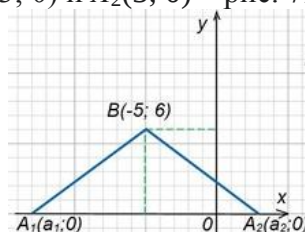


Рисунок 79.

Вычисление абсциссы (ординаты) точки, которая лежит на оси абсцисс (ординат) и находится на одинаковом расстоянии от двух заданных точек, рассмотрим на примере 139

Пример 3

Найти на оси Оу точку, которая находится на одинаковом расстоянии от точек $A(6; 12)$ и $B(-8; 10)$.

Решение:

пусть координаты нужной по условию задачи точки, лежащей на оси Оу, будут $O_1(0; b)$ (у точки, лежащей на оси Оу, абсцисса равна нулю). Из условия следует, что $O_1A = O_1B$.

По формуле

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

находим:

$$O_1A = \sqrt{(0-6)^2 + (b-12)^2} = \sqrt{36 + (b-12)^2},$$

$$O_1B = \sqrt{+8^2 + (b-10)^2} = \sqrt{64 + (b-10)^2}.$$

Имеем уравнение

$$\sqrt{36 + (b-12)^2} = \sqrt{64 + (b-10)^2}.$$

Выполняя элементарные преобразования при решении иррациональных уравнений, получим $b=4$.

Необходимая по условию задачи точка $O_1(0; 4)$ – рис. 80.

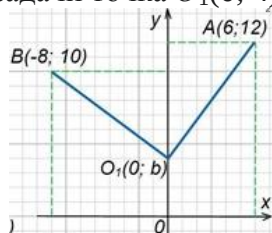


Рисунок 80.

Деление отрезка в данном отношении

Координаты x, y, z точки M , которая делит отрезок M_1M_2 , ограниченный точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, в отношении λ , определяется по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Пример 4

Даны концы отрезка AB : $A(-2; 5)$ и $B(4; 17)$. На этом отрезке расположена точка C , расстояние от которой до точки A в два раза больше расстояния от точки B . Вычислить координаты точки C .

Решение:

по условию задачи $AC=2BC$, тогда $\lambda=2$.

По формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

вычислим координаты точки C :

$$x = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{-2 + 8}{3} = 2,$$

$$y = \frac{5 + 2 \cdot 17}{1 + 2} = \frac{5 + 34}{3} = 13.$$

Т.о., $C(2; 13)$.

Пример 5

Доказать, что треугольник ABC : $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ – прямоугольный.

Решение:

вычислим длины сторон треугольника по формуле:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2},$$

$$AB = \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40},$$

$$BC = \sqrt{(11+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160},$$

$$AC = \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.$$

Т.к. $AB^2=40$, $BC^2=160$, $AC^2=200$, то $AB^2+BC^2=AC^2$.

Т.о., сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Из этого следует, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой.

Задания для самостоятельного решения:

1) Доказать, что треугольник с вершинами $A(3; -1; 2)$, $B(0; -2; 2)$, $C(-3; 2; 1)$ равнобедренный.

2) На оси абсцисс найти точку, расстояние от которой до точки $A(-3; 4; 8)$ равно 12.

3) На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1; -3; 7)$ и $B(5; 7; -5)$.

4) Даны вершины $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -6)$, $C(-5; 0; 2)$ треугольника. Вычислить длину его медианы, проведенной из вершины A .

5) Даны две вершины $A(2; -3; -5)$, $B(-1; 3; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4; -1; 7)$. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

6) Вычислить координаты концов отрезка, который разделен точками $C(2; 0; 2)$ и $D(5; -2; 0)$ на три равные части.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы для вычисления расстояния между двумя точками.
2. Запишите формулы для вычисления координат середины отрезка.
3. Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.

Практическое занятие №32

Скалярное произведение векторов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления скалярного произведения векторов;

уметь:

- вычислять скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Сведения из теории:

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через ϕ , то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить также формулой:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|np_a\vec{b}$$

или

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|np_b\vec{a}.$$

Из формулы $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$ следует, что $\vec{a}\vec{b} > 0$, если ϕ – острый угол, $\vec{a}\vec{b} < 0$, если ϕ – тупой угол; $\vec{a}\vec{b} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается формулой $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, или в координатах $\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$

Проекция произвольного вектора $S=(x, y, z)$ на какую-нибудь ось u определяется формулой:

$$np_u \vec{S} = \vec{S}\vec{e},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный по оси u .

Если даны α, β, γ , которые оси u составляют соответствующие углы с координатными осями, то $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и для вычисления вектора $\vec{S}$ может служить формула:

$$np_u \vec{S} = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma.$$

Пример 1.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

$$\vec{a}\vec{b}, |\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2, (\vec{a} + \vec{b})^2, (3\vec{a} + 2\vec{b})^2, (\vec{a} - \vec{b})^2, (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}).$$

Решение:

из формулы $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, выразим $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, тогда

$$\vec{a}\vec{b} = 12 \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \left(-\frac{1}{2} \right) = -6;$$

т.к. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $|\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$;

по формуле сокращенного умножения квадрата суммы, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2(-6) + 16 = 13;$$

аналогично

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 81 + 12(-6) + 64 = 73;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата разности, имеем

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 2(-6) + 16 = 37;$$

раскроем скобки

$$(\vec{3a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 27 + 4(-6) - 64 = -61.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\varphi = \frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: $(\vec{3a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

2) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3) Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; 4)$ и $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $\sqrt{\vec{a}^2}$, $\sqrt{\vec{b}^2}$, $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

4) Даны точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Вычислить: $\sqrt{\vec{AB}^2}$, $\sqrt{\vec{AC}^2}$, $(2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA})$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы для вычисления скалярного произведения векторов.
2. Запишите формулу для вычисления угла между векторами.

Практическое занятие №32

Использование векторов при решении математических и прикладных задач

Цель работы:

студент должен:

знать:

- векторы и простейшие действия над ними;

уметь:

- применять правила действия над векторами при решении математических и прикладных задач.

Сведения из теории:

Рассмотрим задачи трёх типов, которые целесообразно решать с помощью векторов.

Первый тип: задачи, связанные с доказательством параллельности прямых и отрезков, прямых и плоскости

Пример 1

Доказать что вектор, концами которого являются середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен половине векторной суммы двух других противоположных сторон.

Решение:

пусть $ABCD$ – четырехугольник, M – середина AB , N – середина CD . Тогда

необходимо доказать, что $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. Пусть O – произвольная точка плоскости, соединим ее с вершинами и серединами двух сторон четырехугольника, выполним рисунок (рис. 86):

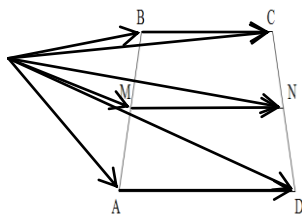


Рисунок 86.

По правилу деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \text{ По правилу треугольника, имеем:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}). \end{aligned}$$

Задача для самостоятельного решения №1. Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Второй тип: задачи, в которых доказывается, что некоторая точка делит отрезок в заданном отношении

Пример 2

На стороне AC треугольника ABC взята точка M так, что $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$, а на продолжении стороны BC такая точка N что $|\overrightarrow{BN}| = |\overrightarrow{BC}|$. В каком отношении точка P пересечения AB и MN делит каждый из этих отрезков.

Решение:

выполним рисунок (рис. 87), соответствующий условию задачи:

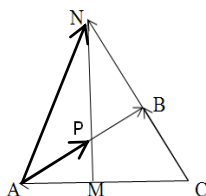


Рисунок 87.

Пусть и $\frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x$, $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y$.

Выберем базисные векторы $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

Разложим вектор $\overrightarrow{AP}$ по базисным двумя различными способами:

$$a) \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}} = y, \text{ тогда } \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{y}{y+1}, \text{ т.к. векторы } \overrightarrow{AP} \text{ и } \overrightarrow{AB} \text{ сонаправлены, то}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \overrightarrow{AB} = \frac{y}{y+1} (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{y}{y+1} (\vec{a} - \vec{b}).$$

Т.е.

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{y+1} \vec{a} - \frac{y}{y+1} \vec{b}.$$

$$б) \frac{\overrightarrow{MP}}{\overrightarrow{PN}} = x, \text{ тогда, } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \overrightarrow{AM} + \frac{x}{x+1} \overrightarrow{AN}.$$

Но, по условию задачи $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{4} |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{4} |\vec{b}|$, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, поэтому

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{x+1} \left(-\frac{1}{4} \vec{b} \right) + \frac{x}{x+1} (2\vec{a} - \vec{b}).$$

В полученном выражении раскроем скобки, упростим, тогда получим:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2x}{x+1} \vec{a} - \frac{1+4x}{4(x+1)} \vec{b}.$$

Учитывая единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{y}{y+1} = \frac{2x}{x+1}, \\ \frac{y}{y+1} = \frac{1+4x}{4(x+1)}. \end{cases}$$

Решая систему любым известным способом (сложением, подстановкой), получим:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, точка P делит отрезок AB в отношении 2:3 и отрезок MN в отношении 1:4.

Задача для самостоятельного решения №2. На диагоналях AB_1 и BC_1 граней AA_1B_1B и BB_1C_1C параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки соответственно H и M так, что отрезки MH и A_1C параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков (воспользуйтесь предложенным рис. 88).

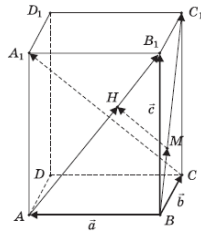


Рисунок 88.

Третий тип: задачи на доказательство принадлежности трех и более точек одной прямой

Пример 3

Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC четырехугольника $ABCD$, причем $AM:MD=BN:NC=3:4$. Докажите, что середины отрезков AB , MN и CD лежат на одной прямой.

Решение:

выполним рисунок (рис. 89), соответствующий условию задачи

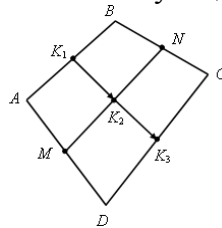


Рисунок 89.

Пусть K_1 – середина AB , K_2 – середина MN , K_3 – середина CD . Используя формулы деления отрезка в заданном отношении, имеем:

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN}),$$

$$\overrightarrow{K_1K_3} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Из условия $AM:MD=BN:NC=3:4$ следует, что

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{K_1K_2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{7}\overrightarrow{K_1K_3}.$$

Т.о., векторы $\overrightarrow{K_1K_2}$ и $\overrightarrow{K_1K_3}$ коллинеарны, и, значит, точки K_1 , K_2 и K_3 лежат на одной прямой.

Задача для самостоятельного решения №3. В пространстве расположены отрезки AB и A_1B_1 . Точка M есть середина отрезка AB , точка M_1 – середина A_1B_1 . Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 , и MM_1 расположены на одной прямой.

Контрольные вопросы:

1. Приведите примеры задач, которые целесообразно решать с помощью векторов.

Практическое занятие №32

Скалярное произведение векторов

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления скалярного произведения векторов;

уметь:

- вычислять скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Сведения из теории:

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через φ , то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выразить также формулой:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|np_a\vec{b}$$

или

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|np_b\vec{a}.$$

Из формулы $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ следует, что $\vec{a}\vec{b} > 0$, если φ – острый угол, $\vec{a}\vec{b} < 0$, если φ – тупой угол; $\vec{a}\vec{b} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается формулой

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}, \text{ или в координатах } \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Проекция произвольного вектора $S=(x, y, z)$ на какую-нибудь ось u определяется формулой:

$$np_u \vec{S} = \vec{S} \vec{e},$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, направленный по оси u .

Если даны α, β, γ , которые оси u составляют соответствующие углы с координатными осями, то $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ и для вычисления вектора $\vec{S}$ может служить формула:

$$np_u \vec{S} = x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma.$$

Пример 1.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить:

$$\vec{a}\vec{b}, |\vec{a}|^2, |\vec{b}|^2, (\vec{a} + \vec{b})^2, (3\vec{a} + 2\vec{b})^2, (\vec{a} - \vec{b})^2, (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}).$$

Решение:

из формулы $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, выразим $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, тогда

$$\vec{a}\vec{b} = 12 \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \left(-\frac{1}{2} \right) = -6;$$

т.к. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $|\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$;

по формуле сокращенного умножения квадрата суммы, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2(-6) + 16 = 13;$$

аналогично

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 81 + 12(-6) + 64 = 73;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата разности, имеем

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 2(-6) + 16 = 37;$$

раскроем скобки

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 27 + 4(-6) - 64 = -61.$$

Задачи для самостоятельного решения:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны; вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\varphi = \frac{\pi}{3}$; зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить: $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, $(\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2$.

2) Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, определить модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3) Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; 4)$ и $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $\sqrt{\vec{a}^2}$, $\sqrt{\vec{b}^2}$, $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$.

4) Даны точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$, $C(0; 1; -5)$. Вычислить: $\sqrt{\vec{AB}^2}$, $\sqrt{\vec{AC}^2}$, $(2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA})$.

Контрольные вопросы:

- Запишите формулы для вычисления скалярного произведения векторов.
- Запишите формулу для вычисления угла между векторами.

Практическое занятие №33

Подобие тел. Отношения площадей поверхностей подобных тел

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы для вычисления площадей поверхностей цилиндра, конуса, сферы, подобных фигур;

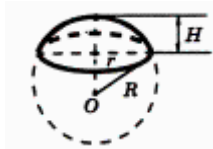
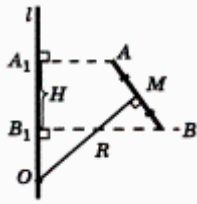
уметь:

- уметь вычислять площади поверхностей цилиндра, конуса, сферы, подобных фигур.

Сведения из теории:

Площади тел вращения

Площадь боковой поверхности цилиндра $S = 2\pi RH$ Площадь полной поверхности цилиндра $S = 2S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = 2\pi R(R + H)$	
Площадь боковой поверхности конуса $S = \pi Rl$ Площадь полной поверхности конуса $S = S_{\text{осн.}} + S_{\text{бок.}} = \pi R(R + l)$	

Площадь боковой поверхности усеченного конуса $S_{бок.} = \pi(R+r)l$ Площадь полной поверхности усеченного конуса $S_{полн.} = \pi(R^2 + r^2 + (R+r)l)$	
Площадь поверхности сферы $S = 4\pi R^2$ Площадь сферической поверхности сферического сегмента $S_{бок.} = 2\pi RH$ Площадь полной поверхности сферического сегмента $S_{полн.} = S_{бок.} + \pi r^2 = 2\pi RH + \pi r^2$	
Поверхность вращения отрезка AB, не имеющего с осью l общих внутренних точек, равна произведению проекции этого отрезка на ось и длины окружности, радиусом которой служит отрезок серединного перпендикуляра отрезка с концами на оси и на отрезке	
Отношение поверхностей подобных тел равно квадрату коэффициента подобия	

Пример 1

В "Путешествии Гулливера" рассказывается о лилипутах, рост которых в 12 раз меньше нормального. Если на костюм человека нормального роста идет 4 м^2 материала, то, сколько материала идет на костюм лилипута?

Решение:

коэффициент подобия $= 12^2$, т. е. на костюм лилипута идет в 144 раза меньше. Т.о., $40\,000 \text{ см}^2 : 144 = 280 \text{ см}^2$.

Пример 2

Один человек на $1/4$ ниже другого. Каково отношение поверхностей их тел, считая, что оба тела геометрически подобны?

Решение:

поверхность человека меньшего роста составляет $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ поверхности более высокого.

Пример 3.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна 21π , а диаметр основания равен 7. Найдите высоту цилиндра.

Решение:

высота цилиндра равна:

$$h = \frac{S_{бок.}}{2\pi R} = \frac{21\pi}{7\pi} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 4

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину – рис. 77). Центр сферы находится в центре основания конуса. Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение:

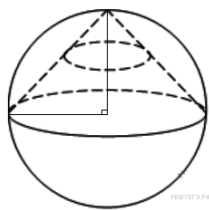


Рисунок 77.

высота конуса перпендикулярна основанию и равна радиусу сферы. Тогда по теореме Пифагора получаем:

$$l^2 = r^2 + r^2,$$

$$l^2 = 2r^2,$$

$$l = r\sqrt{2}.$$

Радиус сферы равен $28\sqrt{2}$ поэтому образующая равна:

$$28\sqrt{2}\sqrt{2} = 56.$$

Ответ: 56.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата в 2 раза (в 5 раз). Во сколько раз площадь первого квадрата больше площади второго квадрата?

2) Сторона первого квадрата составляет $\frac{1}{3}$ (0,1) стороны второго квадрата. Какую часть площадь первого квадрата составляет от площади второго квадрата?

3) Коэффициент подобия в подобных многоугольниках равен 4 ($\frac{1}{5}$; 0,4; 2,5). Чему равно отношение их площадей?

4) Отношение площадей подобных многоугольников равно 36 (100; 0,09). Чему равно отношение сходственных сторон этих многоугольников?

5) Площадь боковой поверхности цилиндра равна 18π , а диаметр основания равен 9. Найдите высоту цилиндра.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы площадей поверхности цилиндра, конуса, шара.

2. Чему равно отношение поверхностей подобных тел?

Практическое занятие №34

Вычисление объемов тел и поверхностей вращения

Цель работы:

студент должен:

знать:

- формулы объемов тел и поверхностей вращения;

уметь:

- вычислять объемы тел и поверхностей вращения.

Сведения из теории:

Объем прямоугольного параллелепипеда

$$V = abc,$$

где a , b , c – стороны параллелепипеда.

Объем куба

$$V = a^3,$$

где a – длина грани куба.

Объем призмы

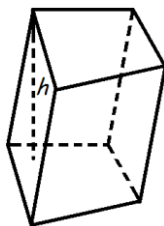


Рисунок 70. Призма

Объем призмы равен произведению площади основания призмы, на высоту:

$$V = S_o h,$$

где S_o – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Объем параллелепипеда

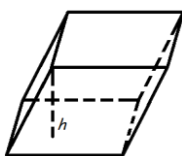


Рисунок 71. Параллелепипед

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту:

$$V = S_o \cdot h,$$

где S_o – площадь основания, h – длина высоты.

Объем прямоугольного параллелепипеда

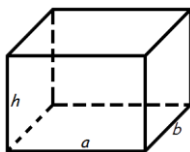


Рисунок 72. Прямоугольный параллелепипед

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению его длины, ширины и высоты:

$$V = a \cdot b \cdot h,$$

где a – длина, b – ширина, h – высота.

Объем пирамиды

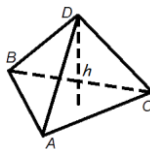


Рисунок 73. Пирамида

Объем пирамиды равен трети от произведения площади ее основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где S_o – площадь основания пирамиды, h – длина высоты пирамиды.

Объем правильного тетраэдра

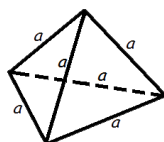


Рисунок 74. Тетраэдр

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12},$$

где a – длина ребра правильного тетраэдра.

Объем цилиндра

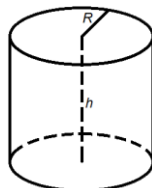


Рисунок 75. Цилиндр

Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту:

$$V = \pi R^2 h$$

или

$$V = S_o h,$$

где S_o – площадь основания цилиндра, R – радиус цилиндра, h – высота цилиндра, $\pi=3,141592$.

Объем конуса

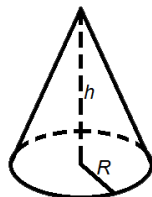


Рисунок 76. Конус

Объем конуса равен трети от произведения площади его основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

или

$$V = \frac{1}{3} S_o h,$$

где S_o – площадь основания конуса, R – радиус основания конуса, h – высота конуса, $\pi=3,141592$.

Объем шара

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

где R – радиус шара, $\pi=3,141592$.

Пример 1

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см³.
Определите ребро куба.

Решение:

обозначим ребро куба за x и составим уравнение:

$$\begin{aligned}
 (x+2)^3 &= x^3 + 98, \\
 x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= x^3 + 98, \\
 6x^2 + 12x - 90 &= 0, \\
 x^2 + 2x - 15 &= 0, \\
 x_1 &= -5, x_2 = 3.
 \end{aligned}$$

$x_1 = -5$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

Пример 2

Прямоугольный лист жести, имеющий 1,6 м длины и 0,8 м ширины, можно согнуть в трубку двояким образом: в первом случае длина трубки будет 1,6 м, во втором 0,8 м. Найти отношение объемов трубок.

Решение:

трубки образуют цилиндры, объем, которого вычисляется по формуле:

$$V = \pi R^2 h.$$

У первого цилиндра высота будет 1,6 м, тогда радиус 0,4 м. Во втором цилиндре высота будет 0,8 м, тогда радиус 0,8 м. Вычислим отношение объемов двух цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi 0,4^2 1,6}{\pi 0,8^2 0,8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1:2.

Задания для самостоятельного решения:

Решите задачи:

1) Измерения прямоугольного параллелепипеда: 15 м, 50 м и 36 м. Найти ребро равновеликого ему куба.

2) Измерения прямоугольного бруса: 3 см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое его ребро на x см, то поверхность увеличится на 54 см^2 . Как увеличится его объем?

3) Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4. Найти объем цилиндра.

4) Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, каждое из боковых ребер равно 12,5 м. Найти объем пирамиды.

5) Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны по 6 см, а основание 8 см. Боковые ребра равны между собой и равны 9 см. Найти объем пирамиды.

6) В прямом параллелепипеде стороны основания равны 8 см и 15 см и образуют угол в 60° . Меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 30° . Найти объем параллелепипеда.

7) Высота и образующая конуса относятся как 4:5, а объем конуса равен $96\pi \text{ см}^3$. Найти полную поверхность конуса.

Контрольные вопросы:

1. Запишите формулы объемов тел и поверхностей вращения.

Практическое занятие №34

Подобие тел. Отношения объемов подобных тел

Цель работы:

студент должен:

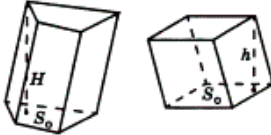
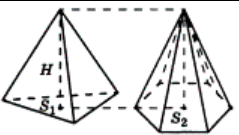
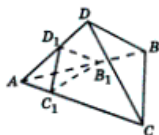
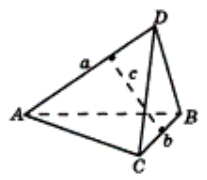
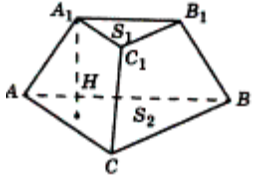
знать:

- формулы для вычисления объемов подобных тел;

уметь:

- вычислять объемы подобных тел.

Сведения из теории:

<i>Объемы равных тел равны</i> Если тело разбито на несколько тел, не имеющих общих внутренних точек, то его объем равен сумме объемов <i>этих</i> тел. <i>Отношение объемов подобных тел равно кубу коэффициента подобия.</i>	
Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту: $V=S_oH$ или произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро: $V=S_o l$.	 $V_1 = S_o H,$ $V_2 = S_o h,$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{H}{h}.$
Объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту: $V = \frac{1}{3} S_o H.$	 $V_1 = \frac{1}{3} S_1 H,$ $V_2 = \frac{1}{3} S_2 H,$ $\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}.$
<i>Объемы призм (пирамид), имеющих равновеликие основания, относятся как их высоты.</i> <i>Объемы призм (пирамид), имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований.</i>	
Объемы тетраэдров, имеющих общий трехгранный угол, относятся как произведения ребер, содержащих этот угол.	 $\frac{V_{ABCD}}{V_{AB_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB_1 \cdot AC_1 \cdot AD_1}.$
Объем тетраэдра может быть найден по формуле: $V = \frac{1}{6} abc \sin \varphi,$ где a и b – длины скрещивающихся ребер, c – расстояние между ними, φ – угол между ними.	
Объем усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$	

Объем многогранника можно получить, разбив его на не имеющие общих внутренних точек тетраэдры (<i>триангуляция</i>) и суммировав их объемы.
Если в многогранник <i>можно вписать шар</i>, то объем многогранника равен: $V = \frac{1}{3} S_{\text{полн.}} R,$ где R – радиус вписанного шара, $S_{\text{полн.}}$ – площадь полной поверхности многогранника.

Пример 1

Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Решение:

поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$$(h/10)^3 = 4/0,5, \text{ т.е. } h^3 = 8 \cdot 10^3, \text{ откуда } h = 20 \text{ см};$$

Аналогично, для диаметра d получим:

$$(d/8)^3 = 4/0,5, \text{ т.е. } d^3 = 8 \cdot 8^3, \text{ откуда } d = 16 \text{ см}.$$

Пример 2

Во сколько, примерно, раз великан ростом в 2 м тяжелее карлика ростом в 1 м?

Решение:

т.к. как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит, наш великан весит больше карлика в 8 раз. Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 см – на целый метр выше человека среднего роста. Самый маленький карлик имел высоту меньше 40 см, т.е. был ниже эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана – эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ карлика, т.е. целую толпу.

Пример 3

Продаются два арбуза разных размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в полтора раза дороже. Какой из них выгоднее купить?

Решение:

объем большого арбуза превышает объем меньшего в $1,25 \cdot 1,25 \cdot 1,25 = 125/64$ раза, т.е. почти вдвое. Выгоднее значит купить крупный арбуз, он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Пример 4

Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй. Во сколько раз она тяжелее?

Решение:

обе кастрюли – тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире. Поэтому ее поверхность больше в $2 \cdot 2 = 4$ раза (поверхности подобных тел относятся, как квадраты линейных размеров). При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности.

Ответ: большая кастрюля вчетверо тяжелее меньшей кастрюли.

Задания для самостоятельного решения:

Решите следующие задачи

1) Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

2) Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая – 50 см. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

3) Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

4) Башня Эйфеля в Париже, 300 м высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8000000 кг. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, висящую всего 1 кг. Какой она будет высоты?

5) Что тяжелее: стакан сахарного песка или такой же стакан колотого сахара?

6) Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Контрольные вопросы:

1. Чему равны объемы равных тел?
2. Чему равно отношение объемов подобных тел?
3. Чему равно отношение объемов призм, пирамид?

Практическое занятие № 35

Решить вариант

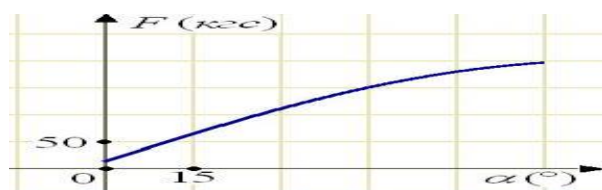
ВАРИАНТ 30

Ответом на задания В1–В15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно. Решение запишите в бланке ответов №2

1 Диагональ экрана телевизора равна 63 дюймам. Выразите диагональ экрана в сантиметрах, если в одном дюйме 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2 Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 19500 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

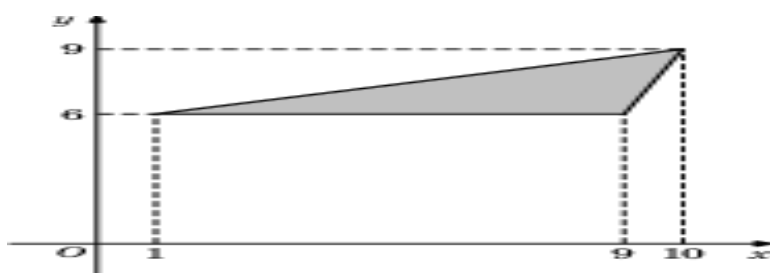
3 В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортерной ленте. При проектировании транспортера необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспортера. На рисунке изображена зависимость натяжения ленты от угла наклона транспортера к горизонту при расчетной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъема в градусах, на оси ординат – сила натяжения транспортерной ленты (в килограммах силы). При каком угле наклона сила натяжения достигает 200 кгс? Ответ дайте в градусах.



4 Для остекления музейных витрин требуется заказать 40 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла $0,25 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стекол. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	300	19	
Б	320	16	
В	340	9	При заказе на сумму больше 3500 руб. резка бесплатно.

5 Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты $(1;6)$, $(9;6)$, $(10;9)$.

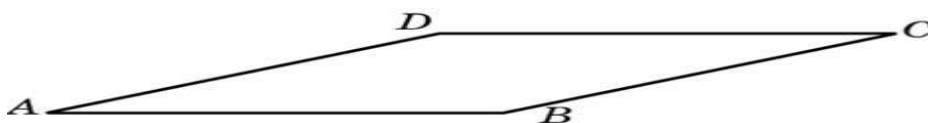


6 Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первые два дня 32 выступления, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

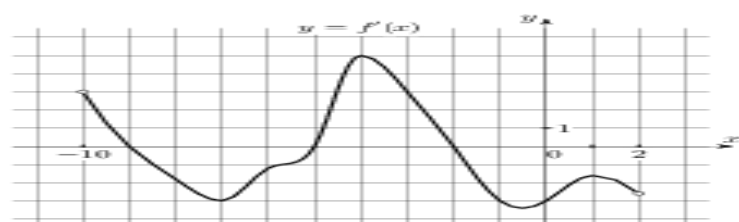
$$\frac{x-119}{x+7} = -5.$$

7 Найдите корень уравнения

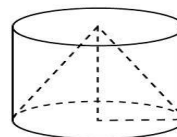
8 Площадь ромба равна 60. Одна из его диагоналей равна 12. Найдите другую диагональ.



9 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой OX



10 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в



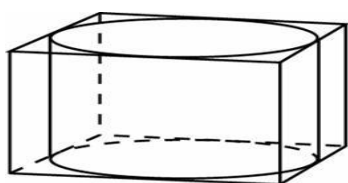
цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 240.

11 Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 4}$

12 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по

формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 8 километров? Ответ выразите в метрах.

13 Правильная четырехугольная призма описана около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



14 Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 84 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 76 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

15 Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$

16 а) Решите уравнение $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$.

б) Укажите количество корней, принадлежащих отрезку $[-\pi, 2\pi]$.

17 . Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD .

18 Приведите пример шестизначного натурального числа, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делится на 72. В ответе укажите ровно одно такое число.